١٠
الجُزءُ الأَوَّل

بسم الله الرحمن الرحيم

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

فريق التأليف:

د. تحسين المغربي (منسقًا)
أ. أحلام صلاح
أ. سرين أبو عيشة
أ. نايف الطيطي
أ. وهبة ثابت
أ. مؤيد الحنجوري
أ. قيس شبانة
أ. نسرين دويكات

مركز المناهج

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين

تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧/ ٢٠١٨ م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

الدائرة الفنية:

الإشراف الإداري	كمال فحماوي
التصميم الفني	منال رمضان

التحكيم العلمي:	د. عمر غنام
التحرير اللغوي:	أ. وفاء جيوسي
الرسومات:	أ. سالم نعيم
المتابعة للمحافظات الجنوبية:	د. سمية النخالة

الطبعة الثالثة

٢٠٢٠ م / ١٤٤١ هـ

دولة فلسطين

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 – رام الله – فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

فاكس 2969377-2-970+ | هاتف 2969350-2-970+

تقديم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقرّرة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٧

مقدمة

تُعدّ مرحلة التمكين مرحلة تعليمية مهمة؛ كونها تأتي محصلة للمعارف والمفاهيم التي اكتسبها الطلبة من مرحلة التهيئة، وهي مرحلة تبدأ من الصف الخامس، وتنتهي بالصف العاشر، يميل الطلبة خلال هذه المرحلة إلى الاستقلالية في التفكير، والبحث، والاستقصاء؛ لذا ما ينبغي مراعاته إشراكهم في المناقشة، وحل المشكلات المطروحة التي يتمّ من خلالها بناء شخصية الطالب القادر على مجاراة التطور العلمي والتكنولوجي الهائل، في عالم مليء بالتغيرات التي تتطلب منه اكتساب روح المبادرة، والتكيف مع مستجدات العصر المتسارعة، بما يضمن له استكشاف المعارف، وفي هذه المرحلة أيضًا، يتمّ تقديم المحتوى التعليمي بقالب عصري؛ ليكونَ امتدادًا للمحتوى الرياضي الذي تمّ في مرحلة التأسيس، ويستمرّ المنهاج المبني على الأنشطة أصلًا في ربط التعلم بالسياقات الحياتية بطريقة جاذبة محببة؛ لتكوين طالب متفاعل نشط، ينفّذ الأنشطة والتمارين المتنوعة المطلوبة منه.

تشكّل العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة الركيزة الأساسية في تمكين الطالب من المفاهيم والمعارف والمهارات، وتوظيفها ضمن سياقات مناسبة، تقوم على حل مشكلات حياتية، ولا يكون ذلك إلا بالقيام بأنشطة محفّزة، ومثيرة للتفكير، تحاكي البيئة الفلسطينية في المجالات الاجتماعية، والاقتصادية، وغيرها، كما تمّ توظيف التكنولوجيا في تنفيذ هذه الأنشطة بطريقة سلسة جذابة، مع الأخذ بعين الاعتبار التدرج في مستوى الأنشطة، بما يتناسب ومستوياتِ الطلبة، والتعامل مع كل مستوى بما يضمن علاج الضعف، وصولًا لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.

تكوّن هذا الكتاب من ثلاث وحدات تعليمية، تناولت الوحدة الأولى منه الاقترانات وتمثيلاتها البيانية، وبعض التحويلات الهندسية عليها، أمّا الوحدة الثانية فتناولت الأسس واللوغاريتمات والاقترانات الأُسّيّة واللوغرتميّة وتمثيلاتهما، وتناولت الوحدة الثالثة الإحصاء والاحتمالات، فقدّمت معادلة خطّ الانحدار، ومعامل الارتباط، ونظرية ذات الحدّين.

أملُنا بهذا العمل، وقد حققنا مطالب العملية التعليمية التعلمية كافة، من خلال منهاج فلسطينيّ واقعيّ منظّم، وإننا إذ نضع بين أيديكم ثمرة جهد متواصل، وكلنا ثقة بكم معلمين ومشرفين تربويين ومديري مدارس، وأولياء أمور، وخبراء ذوي علاقة في رفد هذا الكتاب بمقترحاتكم، وتغذيتكم الراجعة، بما يعمل على تجويده وتحسينه؛ لما فيه مصلحة الطلبة قادة المستقبل.

فريق التأليف

المحتويات

الوحدة الأولى	**الدرس الأول:** الاقتران الزوجي والاقتران الفردي	٨
	الدرس الثاني: تمثيل الاقترانات باستخدام الانسحاب	١٥
	الدرس الثالث: تمثيل الاقترانات باستخدام الانعكاس	٢٠
	الدرس الرابع: اشارة الاقتران	٢٤
	الدرس الخامس: حل المتباينات	٣١
	الدرس السادس: الاقترانات متعددة القاعدة	٣٤
	الدرس السابع: اقتران القيمة المُطْلَقة	٣٨
	الدرس الثامن: اقتران أكبر عدد صحيح	٤٢
	الدرس التاسع: تمارين عامة	٤٧
الوحدة الثانية	**الدرس الأول:** الأسس واللوغاريتمات	٥٣
	الدرس الثاني: الاقتران الأسّي	٦١
	الدرس الثالث: الاقتران اللوغاريتمي	٦٧
	الدرس الرابع: تمارين عامة	٧٣
الوحدة الثالثة	**الدرس الأول:** الارتباط الخطي	٨٠
	الدرس الثاني: معامل ارتباط بيرسون	٨٤
	الدرس الثالث: معامل ارتباط سبيرمان	٨٩
	الدرس الرابع: الانحدار الخطي البسيط	٩٤
	الدرس الخامس: مبدأ العدّ	٩٨
	الدرس السادس: التباديل	١٠٢
	الدرس السابع: التوافيق	١٠٥
	الدرس الثامن: نظرية ذات الحدين	١٠٨
	الدرس التاسع: تمارين عامة	١١١

الوحدة ١ الأولى

الاقترانات ورسومها البيانية
(Functions and Their Graphs)

مطرزات فلسطينية

تشتهرُ فِلسطينُ بِمطرّزاتِها التي قد تظهرُ فيها رسوماتٌ تشبه مُنحنياتٍ لاقتراناتٍ متعددة، أتأمّلُ اللوحةَ، وأصفُ جمالَ المُطرّزاتِ.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاقترانات بأنواعها المختلفة في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- التّعرف إلى الاقتران الزوجيّ والاقتران الفرديّ.
- استخدام التحويلات الهندسيّة في رسم منحنى اقترانٍ ما، في المستوى الديكارتي.
- تحديد إشارةِ بعض الاقترانات.
- حلّ المتباينات من الدرجة الثّانية بمتغيِّرٍ واحد.
- تمثيل اقترانٍ متعددِ القاعدة بيانيّاً.

(١ - ١) الاقترانُ الزوجيّ والاقترانُ الفرديّ
(Even and Odd Functions)

نشاط ١

الرّحلاتُ المدرسيّةُ من النّشاطات اللاصفيّةِ التي يُنفّذُها الطلبةُ؛ ونظراً لِمنْعِ أطفالنا من دخول المدن الفِلسطينيّةِ في الداخل، فإنّ هذه الرحلاتِ قد اقْتصرتْ على مدن الضّفةِ الغربيّة؛ ومِنْ أجل اجْتذابِ الرحلات والزائرين عَمدتْ معظمُ المُتنزّهات والملاهي إلى توفير ألعابٍ متميّزةٍ فيها.

أتأمّلُ اللعبةَ في الصورة، (تُسمَّى هذه اللعبةُ الدولاب الدوّار)

ذهب محمد مع عائلته الى مدينة الملاهي، وعندما ركب في الدولاب لاحظ أن حركة الدوران في الجهة اليمنى من مكان الركوب تكون للأعلى وبالتالي تعطى المواقع إشارة موجبة، بينما تكون حركة الدوران في جهة اليسار للأسفل فإن المواقع تعطى إشارة سالبة. في كل موقع يصنع محور العربة في ذلك الموقع مع محور موقع البداية زاوية مركزية قياسها بين الصفر و ١٨٠°.

بدأ الدولاب بالدوران وعندما وصلت عربة محمد الى الموقع رقم ٥، توقف الدولاب للحظة من أجل أن يركب أشخاص اخرون فكان قياس الزاوية المركزية في تلك اللحظة يساوي ٧٥°.

واصل الدولاب حركته وعندما وصلت عربة محمد الموقع رقم ٧ توقف الدولاب مرةً أخرى فكان قياس الزاوية المركزية في تلك اللحظة = ...

بدأ الدولاب حركته من جديد ووصل الى الموقع -٧، قياس الزاوية المركزية في تلك اللحظة = ...

ليكن الاقتران ق: رقم الموقع الذي تقف فيه العربة ⟵ قياس الزاوية المركزية في تلك اللحظة:

فإن ق(٧) = ق(-٧) = ...

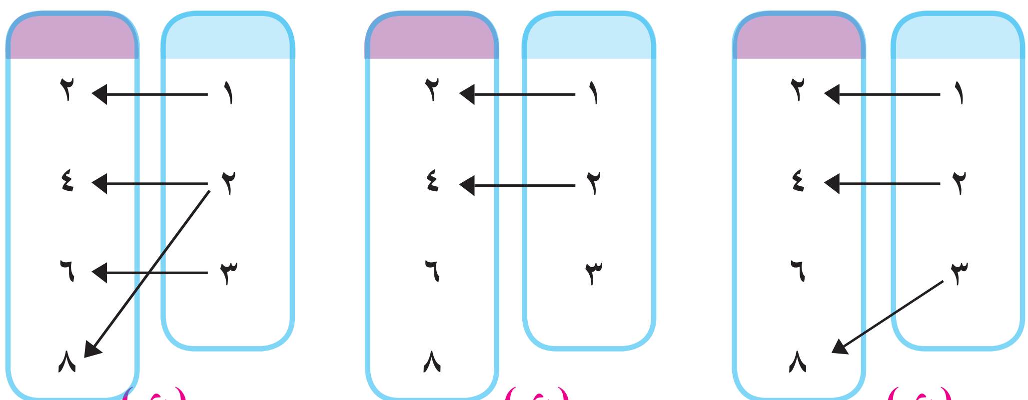
ق(٥)= ق(-٥) = ...

ماذا نستنتج ؟

أتذكّرُ **الاقتران: هو علاقة من المجموعة أ إلى المجموعة ب، بحيث يرتبطُ كلُّ عنصرٍ من عناصرِ المجموعة أ بعنصرٍ واحدٍ فقط من عناصرِ المجموعة ب.**

نشاط ٢

أيٌّ من العلاقات الآتية تمثّلُ اقتراناً؟



(ع$_{3}$) (ع$_{2}$) (ع$_{1}$)

ع$_{4}$: س ⟵ ص ، ص ≤ س

$ع_١$: ....

$ع_٢$: ليست اقتراناً؛ لأنّ العنصر ٣ ليس له صورة.

$ع_٣$: ....

$ع_٤$: ....

نشاط ٣

يُراعي المصمّمون في مجال الهندسة المِعماريّة بناءَ تصاميمَ مُتماثلة؛ لأنّ هذا النوع من التصاميم يُعطي الأبنيةّ مِيزةَ مُقاومة الزلازل من ناحية، ويُضفي عليها مَسْحةً جماليّةً من ناحيةٍ أخرى.

- أرسمُ مِحورَ تماثُلٍ للمبنى في الصورة.
- أبحثُ في مكان سكني عن أبنيةٍ لها محاورُ تماثل، أرسمُها أو أُصوّرُها، وأُعيّنُ عليها محورَ التماثل.
- هل التماثلُ يقتصرُ على تصاميمِ الأبنية؟ أذكرُ أمثلةً من البيئة الطبيعيّة يَظهر فيها التماثل.

نشاط ٤

أُمثِّلُ بيانيّاً الاقتران ق على ح ، حيث ق (س) = $س^٢$ + ١ ، س ∈ ح

أُكملُ الجدول الآتي:

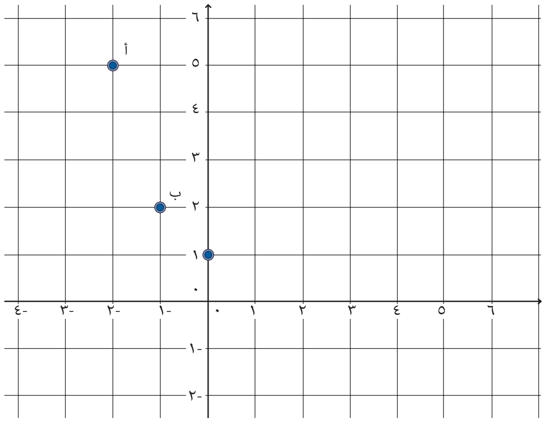
س	٣	٢	١	٠	١-	٢-	٣-
ق(س)	$(٣)^٢$ + ١ = ١٠			١			

أُعيّنُ النقاط (س، ق (س)) في المستوى الديكارتي:

أَصِلُ بين النقاط، وأُكملُ منحنى الاقتران.

أُلاحظُ أنّ منحنى الاقتران ق متماثل حول

....



نشاط ٥

لِيكُن الاقترانُ ق على ح ، حيث ق(س) = س^{٤}، س ∈ ح

أجدُ: ق(٣) = ٨١ ، ق (-٣) = ٨١

ق (٢) = ... ، ق (-٢) = ...

ق (١) = ... ، ق (-١) = ...

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: الاقتران الزوجي ق على ح: هو الاقتران الذي يحقق ق(-س) = ق (س) ، لكل س∈ح وأن منحناه متماثل حول محور الصادات.

نشاط ٦

أُبيّنُ بمثالٍ عدديٍّ أنّ: الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = س^{٢} + س ليس اقتراناً زوجيّاً.

أجد: ق(-٢) = (-٢)^{٢}+ (-٢) = ٢

ق(٢) = ...

ألاحظُ أنّ: ....

نشاط ٧

أبيّنُ جبريّاً أنّ: الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = $س^{٢}$ − ٢، س ∋ ح اقترانٌ زوجيٌّ.

ق(-س) = $(-س)^{٢}$ − ٢ = $س^{٢}$ − ٢

ق(س) = ...

أُقارنُ بين: ق (-س) ، ق (س).

نشاط ٨

الاقتران ق الذي قاعدته ق (س) = $س^{٣}$ ، س ∋ ح

ق (٤) = ٦٤، ق (-٤) = -٦٤ ، -ق (٤) = -٦٤ ، إذن: ق (-٤) = -ق (٤)

ق (٣) = ...، ق (-٣) = ...، -ق (٣) = ...

إذن: ....

ق (٢) = ...، ق (-٢) = ...، -ق (٢) = ...

إذن: ....

ألاحظُ أنّ: ق(-س) = ...

أتعلم: الاقتران الفردي ق على ح: هو الاقتران الذي يحقق ق(-س) = -ق(س)، لكلّ س ∋ ح

نشاط ٩

اعتماداً على الاقتران ق(س) = $س^{٣}$ ، في نشاط (٨)

أُكملُ الجدول الآتي:

س	٣	٢	١	٠	-١	-٢	-٣
ق(س)	$(٣)^{٣}$ = ٢٧			٠			

- أُعيّنُ النقاط(س،ق(س)) في المستوى الديكارتي.
- أصلُ بين النقاط، وأرسمُ منحنى الاقتران.

أتعلّمُ: الاقترانُ الفرديّ متماثلٌ حول نقطة الأصل.

نشاط ١٠

أُبيّنْ جبريّاً أنَّ:

الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = س^{٣} − س ، س ∈ ح هو اقترانٌ فرديٌّ.

أجدُ: ق (-س) = (-س)^{٣} − (-س) = -س^{٣} + س

-ق(س) = ...

أُقارنُ بين ق (-س) ، -ق(س).

نشاط ١١

أبيّنُ بمثالٍ عدديٍّ: هل الاقتران ق(س) = س^{٣} + س^{٢}، زوجيٌّ، أم فرديٌّ، أم غير ذلك؟

ألاحظُ أنَّ: ق (٥) = (٥)^{٣} + (٥)^{٢} = ١٢٥ + ٢٥ = ...

ق (-٥) = ...

-ق (٥) = ...

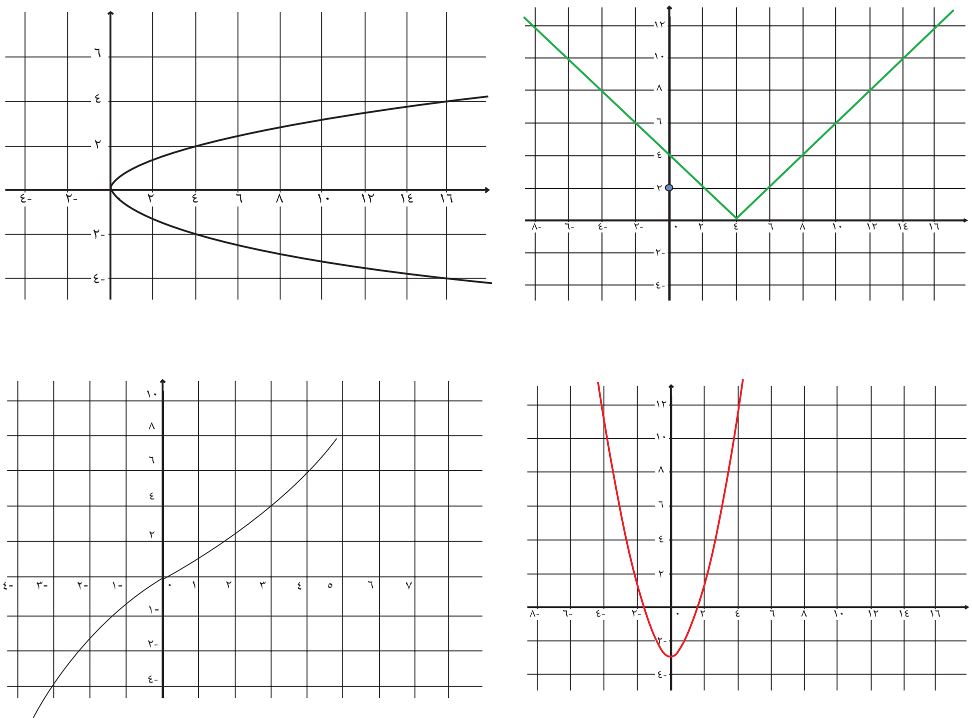
أُقارنُ بين: ق (٥) ، ق (-٥)

وأستنتجُ أنّ: الاقتران ق: ....

أتعلّمُ: إذا لم يكن الاقترانُ زوجيّا فليس من الضرورة أن يكون اقتراناً فرديّاً.

تمارين ومسائل:

(١) أيٌّ من المنحنيات الآتية يمثِّل اقتراناً، وإذا كان اقتراناً، فأيٌّ منها زوجيٌ، وأيُّها فرديّ أو غير ذلك ؟



(٢) أتحقَّقُ جبريّاً ممّا يأتي:

أ) الاقتران ق(س) = $س^{٣}$ + ٢س ، اقترانٌ فرديٌّ.

ب) الاقتران ق(س) = $س^{٤}$ − $س^{٢}$ ، اقترانٌ زوجيٌّ.

(٣) أبيّنُ بمثالٍ عدديّ: هل الاقتران ق(س) = $س^{٥}$ + $س^{٤}$، زوجيٌّ، أم فرديٌّ، أم غير ذلك؟

(٤) أتحقّقُ جبريّاً من صِحّة العبارة: حاصلُ ضرْبِ اقترانيْن زوجيّيْن هو اقترانٌ زوجيّ.

(١ - ٢) تمثيل الاقترانات باستخدام الإنسحاب (Translation)

نشاط ١

شـاركتْ فِلَسطينُ في بطولة العالـم للشّطرنجِ في النرويج مع ١٧٨ دولةً، حيـث انتقلت فلسـطينُ مـن المرتبـة رقـم ١٦٣ إلـى المرتبـة ١٠٣ علـى مسـتوى العالـم؛ إذْ تفوّقـتْ علـى دولٍ عربيّـةٍ متميّـزةٍ فـي هـذه اللعبـة، وحصلـتْ علـى مكانـةٍ دَوْليّـة فيهـا.

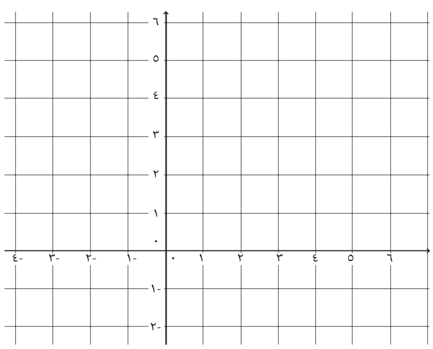
تتحركُ أحجارُ الشّطرنجِ وَفْقَ قواعد محدّدة.

- يتحرّكُ الملكُ بمقدار وحدةٍ واحدةٍ في جميع الاتجاهات.
- يتحركُ الفيلُ ....
- تتحركُ القلعةُ ....
- يتحركُ الوزيرُ ....

تُسمَّى مثلُ هذه الحركاتِ في المستوى تحويلاتٍ هندسيّةً.

نشاط ٢

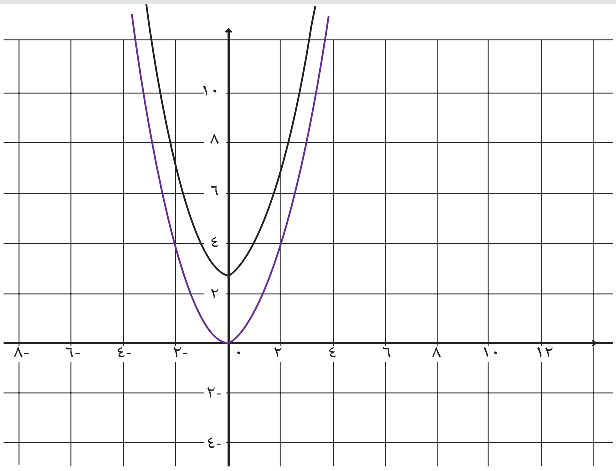
أُعيّنُ النّقـاط: أ (٢ ،١)، ب (-٣، -١)، جـ (-٥، ٢)، ثـمّ أرسمُ المثلث أ ب جـ في المسـتوى الديكارتـي.



- صـورة النقطـة أ (٢،١) بعـد انسـحابها ٣ وحـداتٍ إلـى الأعلـى هـي: أ َ (٢،٤).
- صورة النقطة ب (-٣، -١) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى الأعلى هي: ب َ (.....، .....).
- صورة النقطة جـ (-٥، ٢) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى الأعلى هي: جـ َ (.......، ....).
- أرسمُ المثلثَ أ َ ب َ جـ َ في المستوى الديكارتي.

ألاحظُ أنّ: النقطةَ(س،ص) بعد انسحابها ٣ وحدات إلى الأعلى هي: النقطة (س،ص+٣).

نشاط ٣



في الشكل المجاور ، أنظرُ إلى منحنى الاقتران
ق(س) = س^{٢}، س ∈ ح،
ومنحنى الاقتران
ل(س) = س^{٢} + ٣

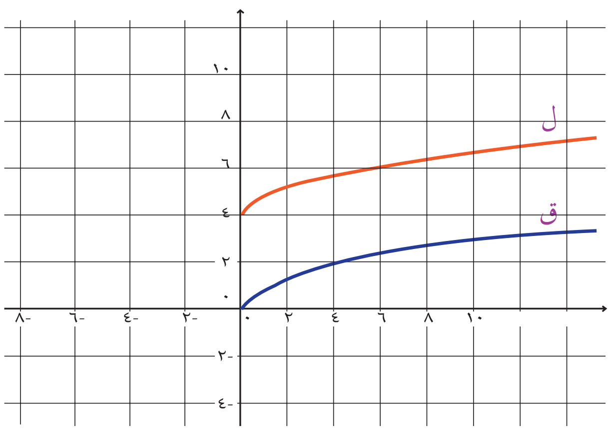
ألاحظ أنّ: منحنى ل(س) هو انسحاب لمنحنى ق(س) بمقدار .... للأعلى.

- أمثِّلُ بيانيّاً منحنى الاقتران: هـ(س) = س^{٢} – ٤ .

أتعلّمُ: منحنى الاقتران ل(س) = ق(س) + جـ هو انسحاب لمنحنى الاقتران ق(س) بمقدار جـ وحدة إلى الأعلى إذا كانت جـ > صفر ، وانسحاب بمقدار | جـ | وحدة إلى الأسفل إذا كانت جـ < صفر.

نشاط ٤

أنظرُ إلى منحنى الاقتران: ق(س) = $\sqrt{س}$ ، س ≥ صفر ومنحنى ل في الشكل الآتي:



منحنى الاقتران ل هو انسحاب لمنحنى الاقتران ق بمقدار ......

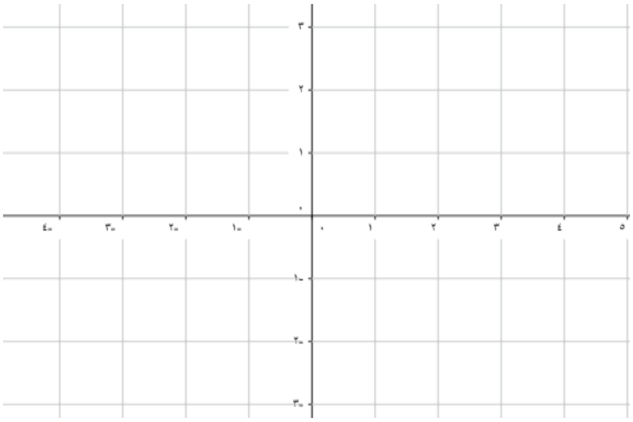
- قاعدة الاقتران ل هي: ....

أمثّلُ بيانيّاً منحنيات الاقترانات الآتية:

- ك(س) = $\sqrt{س}$ – ٢
- هـ(س) = $\sqrt{س}$ + ١

نشاط ٥

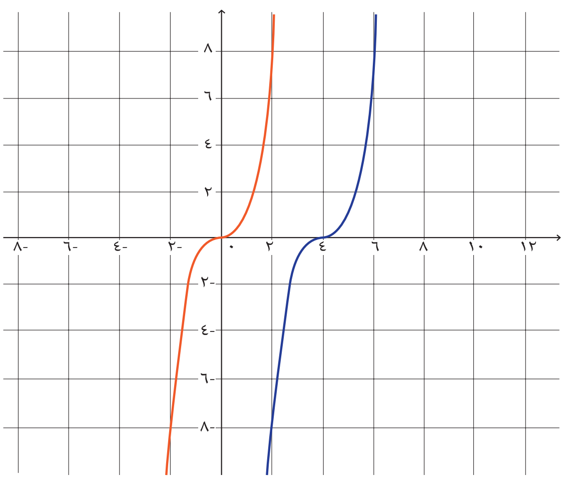
أعيّنُ النقاط: أ(٣ ، ١)،
ب(-١ ، -١)، جـ(-٢ ، ٠)،
د(٢ ، ٢)، وأرسمُ الشكل الرباعي
أ ب جـ د في المستوى
الديكارتي:



- صورة النقطة أ (٣ ، ١) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: أَ(٦ ، ١).
- صورة النقطة ب (-١ ، -١) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: بَ(.....، .....).
- صورة النقطة جـ (-٢ ، ٠) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: جـَ(...... ، .....).
- صورة النقطة د (٢ ، ٢) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: دَ(..... ، ....).
- أرسمُ الشكل الرباعي أَ بَ جـَ دَ في المستوى الديكارتي.
- ألاحظ أن النقطة(س،ص) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي النقطة: (س+٣،ص).

نشاط ٦

اعتماداً على منحنى
ق(س) = س^{٣} ، س ∈ ح
ومنحنى الاقتران:
ل(س)= (س – ٤)^{٣}



منحنى الاقتران ل هو انسحاب لِ ..... بمقدار ...... وحدات.

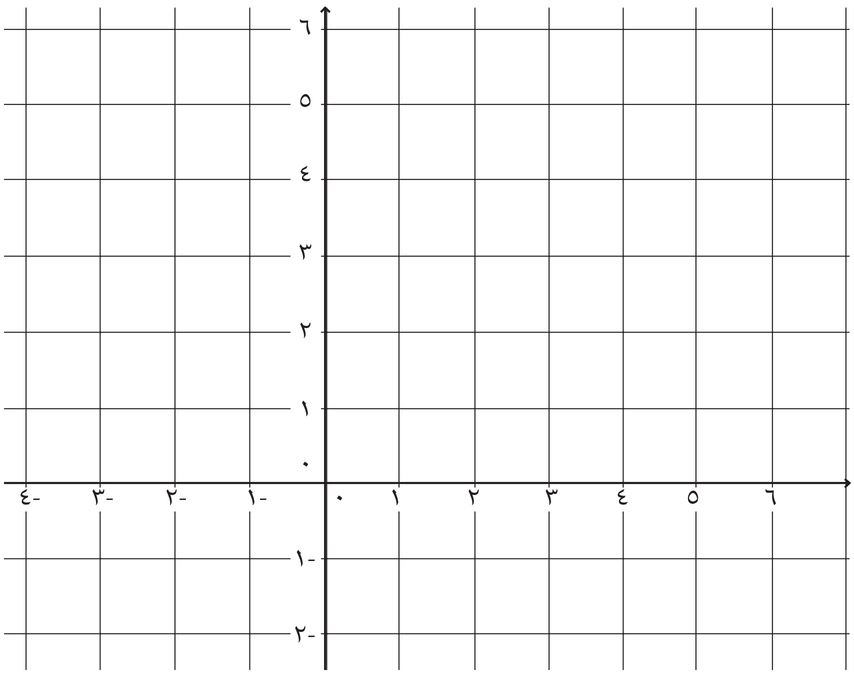
أمثّلُ منحنيات الاقترانات: هـ(س)=(س + ٥)^{٣} ، ك(س)=(س + ٣)^{٣} – ٢، في المستوى الديكارتي.

أتعلّمُ: منحنى الاقتران ق(س + جـ) هو انسحاب إلى اليسار لمنحنى الاقتران ق(س) بمقدار جـ وحدة، إذا كانت جـ > صفر ، وانسحاب الى اليمين بمقدار | جـ | وحدة، اذا كانت جـ < صفر.

نشاط ٧

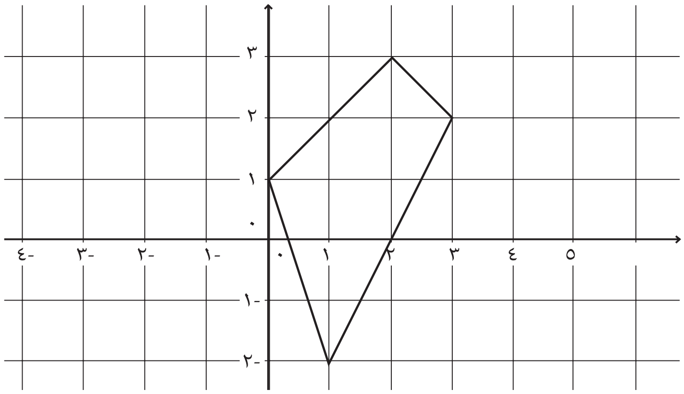
أستخدمُ طريقة إكمالِ المربع؛ لمعرفة التحويلاتِ الهندسيّةِ التي أُجرِيَت على منحنى الاقتران: ق(س) = س^{٢} + ٤س ، ثم أرسمُه، باستخدام تلك التحويلات.

- أجدُ المقدار: $\left(\frac{\text{معامل س}}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{٤}{٢}\right)^{٢} =$ ....
- أكتبُ قاعدة الاقتران بالصورة: ق(س) = (س^{٢} + ٤س + ...) − ....
- ومنها: ق(س) = (س + ...)^{٢} − .... ، (لماذا)؟
- أصِفُ بالكلمات التحويلات الهندسيّة الناتجة ....
- أرسمُ منحنى الاقتران ق في المستوى الديكارتي.

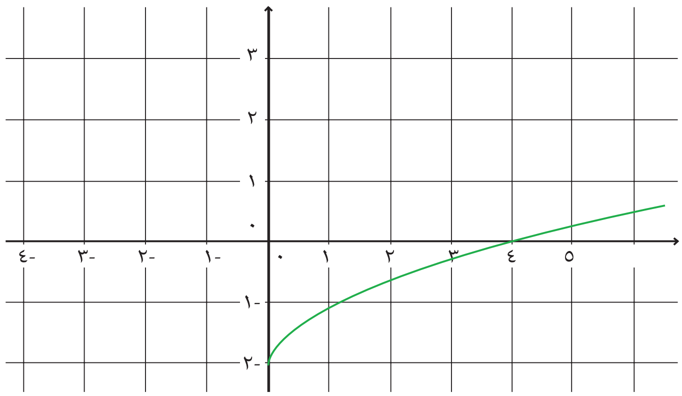


تمارين ومسائل:

(١) أرسمُ الشكلَ الرباعيّ المرسومَ في المستوى الديكارتي بعد انسحابه وَحدتين إلى اليسار، ومن ثم ٣ وَحداتٍ إلى الاسفل.



(٢) بالاعتماد على منحنى ص = ق(س) ، س ≥ ٠ الممثّلِ في المستوى الديكارتي،
أمثل منحنى كل من الاقترانات الآتية في المستوى نفسه



أ) هـ(س) = ق(س) – ٥

ب) ل(س) = ق(س + ٤)

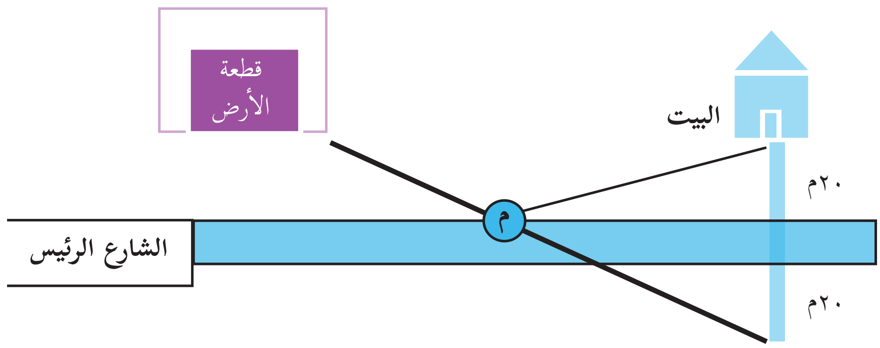
جـ) د(س) = ق(س – ١) + ٣

(٣) باستخدام طريقة إكمال المربع، أرسمُ منحنى الاقتران: هـ(س) = س^{٢} – ١٠ س + ٢٧ ، اعتماداً على منحنى ق(س) = س^{٢}

(١ - ٣) تمثيل الاقترانات باستخدام الإنعكاس
(Reflection)

نشاط ١

تهتمُّ وِزارةُ الزراعةِ بشقِّ طُرقٍ زراعيّةٍ في القرى الفِلسطينيّةِ؛ لزيادة الاهْتمام بالأراضي والثروة الزراعيّة. طلب مُزارعٌ من الوِزارة مساعدتَه في شقِّ طريقٍ بين بيته وقطعة الأرض التي يملكُها ويربطه مع الشارع الرئيس، فذهب مهندسُ البلديّة لمُعاينةِ الموقع، وارتأى أنْ تُشَقَّ الطريقُ، كالمخطّط الذي يظهرُ في الشكل.

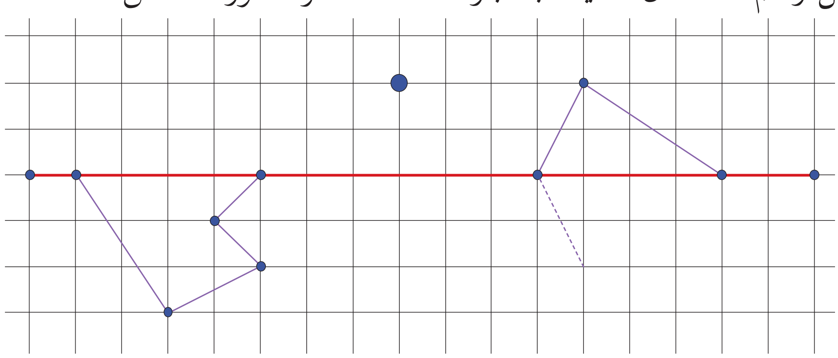


أناقش المخطّطَ الذي رسمه المهندس.

أفكر لماذا أصبحت التكاليفُ أقلَّ ما يمكنُ، عند تحديد موقع النقطة م على الشارع،كما تراه في المخطط؟

نشاط ٢

أُكملُ رسمَ الأشكال الآتية، باعتبار الخطِّ الأحمر محورَ انعكاس:



أتذكّرُ انعكاس النقطة أ (س،ص) في محور السينات هي النقطة أَ (س،-ص).

أُكملُ الجدولَ الآتي:

نشاط ٣

س	٢	١	٠	-١	-٢
ق(س) = س^{٣} + ١			١		-٧
- ق(س) = - (س^{٣} + ١)	-٩				

- أُعيّنُ النّقاطَ من الجدول في المستوى الديكارتي، وأمثّلُ منحنى الاقتران ق(س).
- أُعيّنُ النّقاطَ من الجدول في المستوى نفسه، وأمثّلُ منحنى الاقتران -ق(س).

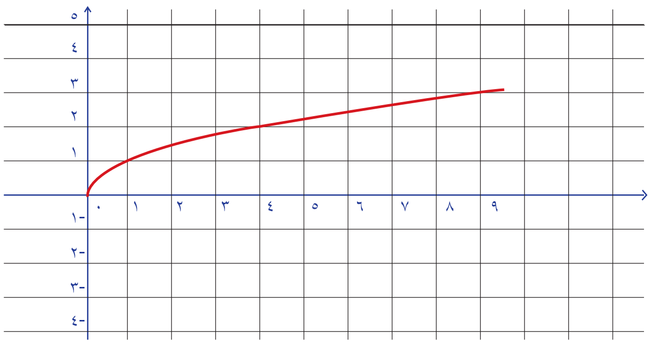
أُلاحظُ أنّ:..............................

أتعلّمُ: منحنى الاقتران -ق(س) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) في محور السينات.

نشاط ٤

يُمثّلُ الشكلُ الآتي منحنى الاقتران:

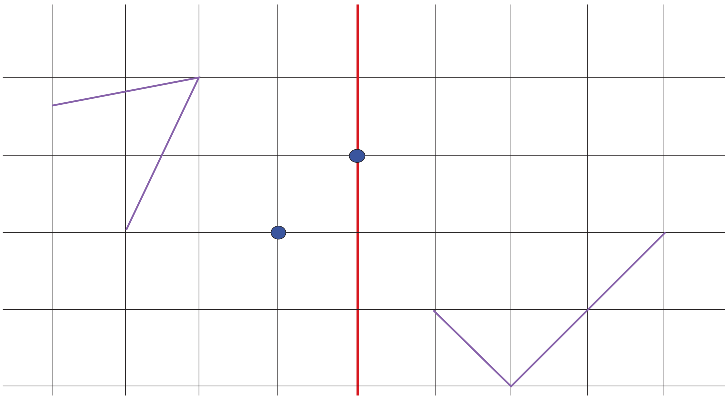
ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، س $\geq$ صفر .



أُمثّلُ منحنى الاقتران ل(س) = $-\sqrt{\text{س}}$ على المستوى نفسه.

نشاط ٥

أُكملُ رسمَ الأشكالِ الآتية، باعتبار الخطِّ الأحمرِ محورَ انْعكاس:



أتذكّرُ انعكاس النقطة ﺃ (س،ص) في محور الصادات هي النقطة ﺃَ (-س،ص).

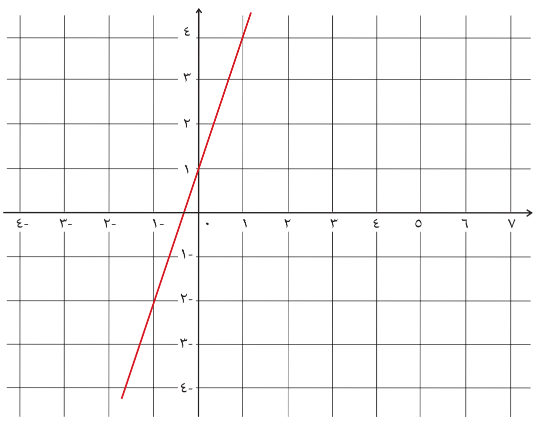
نشاط ٦

يُمثّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقتران

ق(س) = ٣س + ١

أُكملُ: بالاعتماد على القاعدة، يكون

ق(-س) = ٣(-س) + ١ = ...



س	٣	٠	-١
ق(-س)		١	

بالاعتماد على الجدول، أمثّلُ منحنى الاقتران ق(-س) في المستوى الديكارتي.

أتعلّمُ: منحنى الاقتران ق(-س) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) في محور الصادات.

تمارين ومسائل:

(١) أكتبُ الزوجَ المرتّبَ الذي يمثّلُ التحويلات الهندسيّةِ على النقطة (٣، -٤)، في الحالات الآتية:

أ) انعكاس في محور الصادات.

ب) انعكاس في محور السينات.

(٢) أصِفُ بالكلمات التحويلاتِ الهندسيّة الآتية على منحنى ق(س):

أ) ق(-س)

ب) -ق(س) + ١

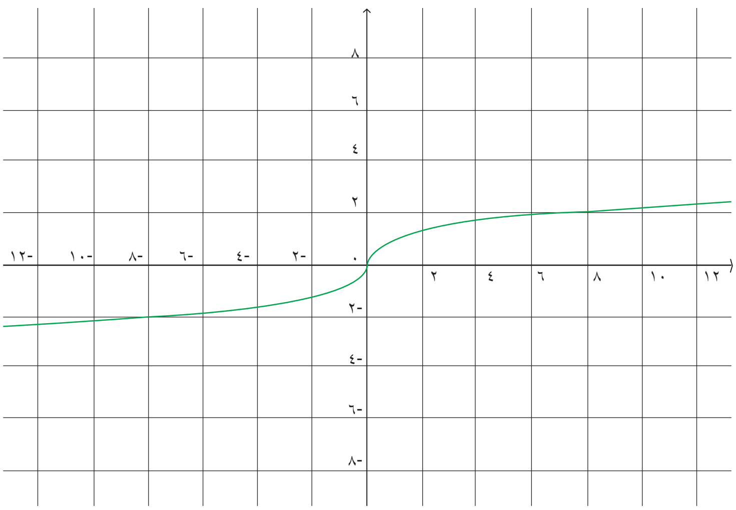
جـ) ق(س – ٢) + ٣

(٣) اعتماداً على منحنى ق(س) المرسوم، أرسمُ منحنيات الاقترانات الآتية:

أ) ق(-س) – ١

ب) -ق(س) + ١

جـ) -ق(-س)



(١ - ٤) إشارة الاقتران (Sign of a Function)

نشاط ١

تهتمُّ وِزارةُ التجارةِ والصناعةِ بتحسين الوضع الاقتصادي، ودعم التجارة في فِلسطينَ.
أبـو ياسـين تاجـرُ أحذيـةٍ، ينـال خصميّـاتٍ علـى المسـتحقات المترتبـة عليـه؛ نظـراً لالتزامـه بواجباتـه تجـاه الـوزارة، طلـب أبـو ياسـين مـن محاسـب المَحـالِّ التجاريّـة تزويـدَه بالوضـع الماليّ لإحداهـا خـلال السـنة السـابقة، فقـدّم لـه المحاسـبُ الوضـعَ الماليّ كمـا فـي الجـدول الآتـي:

الشهر	كانون ثاني	شباط	آذار	نيسان	أيار	حزيران	تموز	آب	أيلول	تشرين أول	تشرين ثاني	كانون أول
الوضع المالي	−	+	+	+	٠	−	−	+	+	+	٠	−

- الأشهر التي ربح المحلّ فيها هي: ....
- الأشهر التي خسر فيها المحلّ هي: ....
- ماذا نستنتج عن الوضع المالي في شهريّ: أيار، تشرين ثاني ؟

أناقش

هل الجدول يعطي صورة شاملة عن الوضع المالي للمحلّ ؟

أولاً: إشارة الاقتران الثابت

نشاط ٢

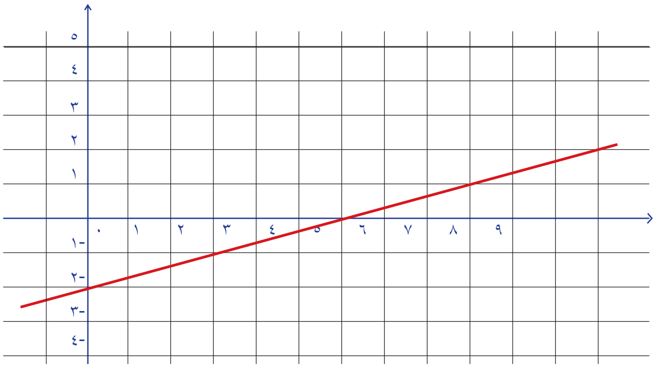
أُعطي أمثلةً على اقترانات ثابتة.

- ق(س)= ١٢، وإشارته موجبة.
- ق(س)= -π، وإشارته سالبة.
- ل(س)= -٢٣، وإشارته ......
- ك(س)= ....، وإشارته موجبة.
- هـ(س)= ....، وإشارته ....

أتعلّمُ: إشارة الاقتران الثابت ق(س) = جـ ، جـ $\in$ ح، هي إشارة جـ نفسها.

ثانياً: إشارة الاقتران الخطّي

يبين الشكل المجاور منحنى اقتران خطي ، قاعدته ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س − ٢



- نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات هي: (.....،.....).
- صفر الاقتران هو: ....
- الفترة التي وقع فيها المنحنى فوق محور السينات هي: ....، وتكونُ إشارتُه ....
- الفترة التي وقع فيها المنحنى تحت محور السينات هي: .... ، وتكونُ إشارتُه ....
- أعيّنُ إشارة الاقتران على خط الأعداد:

٦

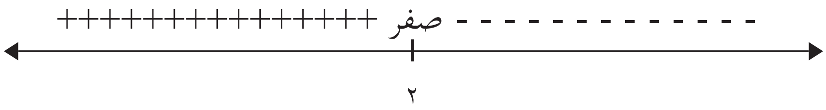
أتعلم: إشارة الاقتران الخطي ق(س) = ﻫس + ب ، س ∈ ح، ﻫ ≠ صفر هي نفس إشارة معامل س ، لكلّ س أكبر من صفر الاقتران، وعكس إشارة معامل س، لكلّ س أصغر من صفر الاقتران.

يُمكنُ توضيحُ ذلك على خط الأعداد:

مثال(١): أعيّنُ إشارة الاقتران ق(س) = ٤ − ٢س

الحلّ: صفر الاقتران = ٢، إذن: يقطعُ منحنى الاقتران محورَ السينات في النقطة (٢،٠).

- إشارة الاقتران (+) موجبة "عكس إشارة معامل س"، لكلّ س < ٢.
- إشارة الاقتران (−) سالبة "إشارة معامل س نفسها"، لكلّ س > ٢.
- أعيّنُ الإشارة على خط الأعداد الآتي:



- يُمكنُ كتابةُ الحلّ بالصورة: ق(س) > صفر (موجبا)، في الفترة]-∞،٢[

ق(س) < صفر (سالبا)، في الفترة]٢،∞[

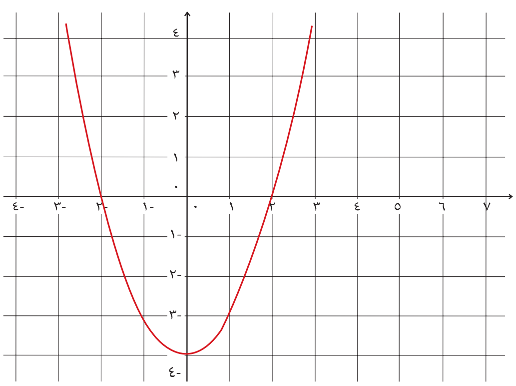
ق(س) = صفر ،عندما س= ٢.

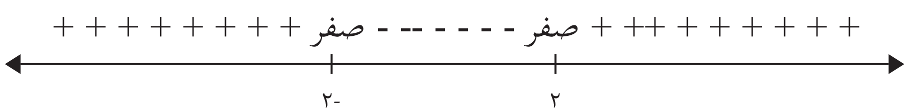
نشاط ٤

ثالثا: إشارة الاقترانِ التربيعيّ

أتأمل منحنى الاقتران المرسوم ق(س) = س^{٢} − ٤،

وإشارة الاقتران الموضّحة على خط الأعداد:





- يقطع المنحنى محور السينات في النقطتين: (......،......) ، (.......،.......)
- يقع منحنى الاقتران تحت محور السينات في الفترة ....
- يقع منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة ....
- إشارة الاقتران موجبة في الفترة ....، بينما إشارته سالبة في الفترة ....
- أصفار الاقتران هي: ....

نشاط ٥

أعيّنُ إشارة الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = س^{٢} + ٣س − ١٠

- أصفار الاقتران هي: ....
- أرسم خط الأعداد، وأعيّنُ عليه أصفار الاقتران.

- ق(-٦) = ٣٦ + -١٨ − ١٠= ٨ > صفر (قيمة موجبة).

ق(-٧) =.........................

ق(-٣) = ٩ + -٩ −١٠ = -١٠< صفر (قيمة سالبة).

ق(١) = ...

ق(٤) = ١٦ + ١٢ − ١٠ = ١٨ > صفر (قيمة موجبة).

ق(٦) = ...

- أعيّنُ إشارةَ الاقتران على خط الأعداد.
- أكتبُ الفتراتِ التي فيها يكون ق(س) موجباً، والفترات التي يكون فيها الاقتران سالباً.

أتعلّمُ: إشارة الاقتران التربيعيّ تكون عكس إشارة معامل س^{٢} بين صفريّ الاقتران، وما عدا ذلك فهي إشارة معامل س^{٢}.

ويُمكنُ توضيحُ ذلك بالشكل؛ حيث ل،م هما صِفرا الاقتران ق ، ل > م :

نشاط ٦

أعيّنُ إشارةَ الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = ١ − س^{٢}

- أصفار الاقتران هي: ....
- إشارة معامل س^{٢} هي: ....
- إشارة الاقتران موجبة (عكس إشارة معامل س^{٢}) في الفترة ....
- إشارة الاقتران سالبة (نفس إشارة معامل س^{٢}) في الفترة ....

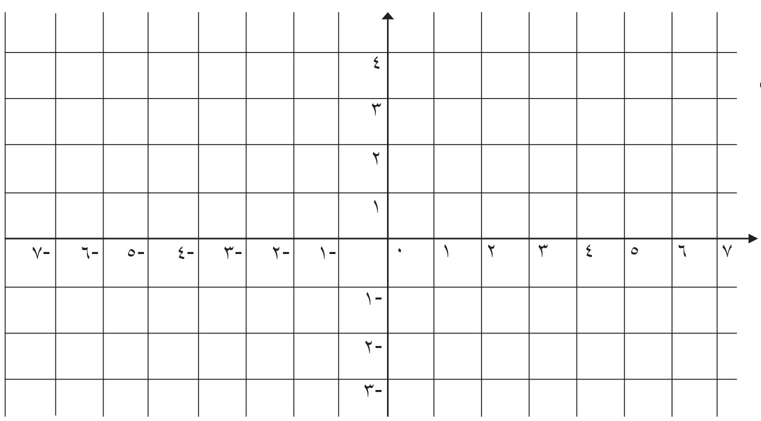
- أرسمُ خطّ الأعداد، وأعيّنُ عليه إشارة الاقتران:

- يقعُ منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة ....
- يقعُ منحنى الاقتران تحت محور السينات في الفترة ....

نشاط ٧

أرسمُ منحنى الاقتران:

ق(س) = س^{٢} + ٦ س + ٩

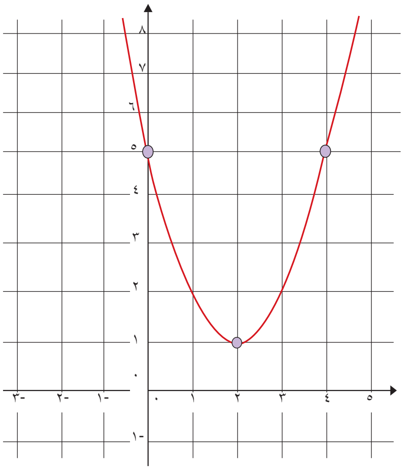


- أصفار الاقتران هي: ....
- إشارة معامل س^{٢} هي: ....
- أُعيّنُ إشارة الاقتران على خط الأعداد.
- يقعُ منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة ....

أتعلّمُ: إشارة الاقتران التربيعيّ: هي إشارة معامل س^{٢} ، إلّا عند صفر الاقتران، إذا كان له صفر واحد فقط.

نشاط ٨

أتأمّلُ منحنى الاقتران في الشكل المجاور ، ثمّ أُجيبُ عن الأسئلة التي تليه:



- هل قطع المنحنى محور السينات ؟
- يقع منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة..............
- أعيّنُ إشارة ق(س) على خط الأعداد وأكتب قاعدته.........................

أتعلّمُ: إشارة الاقتران التربيعيّ هي إشارة معامل س^{٢}، إذا لم يقطعْ منحناهُ محورَ السينات.

أفكر

ما العلاقةُ بين مُميّز العبارة التربيعية (ب^{٢} − ٤ أ جـ) المرافقة للاقتران التربيعي وإشارته ؟

رابعا: إشارة الاقتران النسبيّ

يُسمّى الاقترانُ ق اقتراناً نسبيّاً إذا كانت قاعدتُه على الصورة الآتية:

$$ق(س) = \frac{ل(س)}{م(س)}$$ حيث ل،م كثيرا حدود ، م(س) $\neq$ صفر.

نشاط ٩

أعيّنُ إشارة الاقتران: $ق(س) = \frac{س + ٣}{س^{٢} - ٢س - ٣}$ ، س $\neq$ ٣ ، -١

أعيّنُ إشارةَ البسطِ (س + ٣)، كاقترانٍ خطيّ على خطّ الأعداد:

أعيّنُ إشارةَ المقامِ (س^{٢} − ٢س − ٣)، كاقترانٍ تربيعيّ على خطّ الأعداد

أُعيّنُ إشارةَ الاقترانِ النسبيّ ق على خطّ الأعداد:

نشاط ١٠

أْعيّنُ إشارةَ الاقترانِ ق الذي قاعدته: ق(س)= $\frac{٥}{س + ١}$ ، س $\neq$ -١

- إشارة البسط هي ....
- أُعيّنُ إشارةَ البسط على خطّ الأعداد:
- أُعيّنُ إشارةَ المقام (س+١) على خط الأعداد:
- أُعيّنُ إشارةَ الاقتران النسبي ق على خط الأعداد:

تمارين ومسائل:

(١) أُعيّنُ إشارةَ كلٍّ من الاقترانات الآتية:

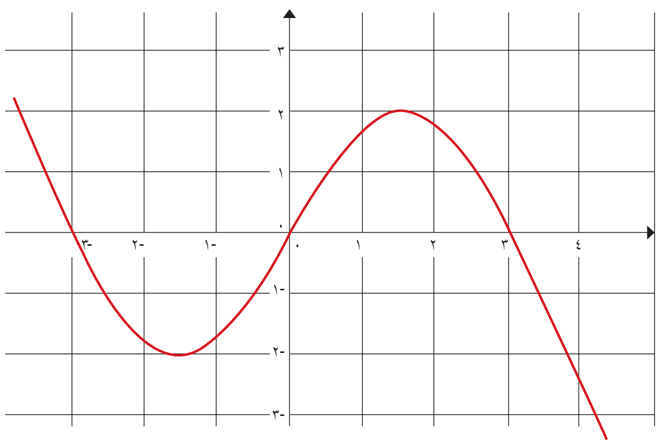
أ) هـ (س) = ٤ - س

ب) ع (س) = -٤ - ٤س - $س^٢$

جـ) م (س) = $\frac{-١}{س}$ ، س $\neq$ صفر

د) ك (س) = $\frac{س^٢ + ٦س + ٥}{س - ٤}$ ، س $\neq$ ٤

(٢) أُعيّنُ إشارةَ الاقتران ق على الفترة [-٣ ، ٤]:



(١ - ٥) حلُّ المُتباينات (Solving Inequalities)

نشاط ١

السياحةُ الداخليّةُ في فلسطينَ من مصادر الدخل. عرضتْ شركةُ سياحةٍ وسفرٍ عُروضاً للسفر في الصيف، في العَرْضِ الأوّل، يدفعُ الشخصُ مبلغَ ٧٠ ديناراً، و٢٠ ديناراً، عن كلّ ليلةٍ يبيتُها في الفندق. وفي العَرضِ الثّاني يدفعُ الشخصُ مبلغَ ١٠٠ دينارٍ، و١٥ ديناراً، عن كلّ ليلةٍ يبيتُها في الفندق.

درسَ أمينٌ العرضيْن، واختارَ العرضَ الثّاني:

- إذا أقامَ أمينٌ في الفندق ليلتيْن، فإنّهُ يدفعُ: ١٣٠ ديناراً
- إذا أقامَ أمينٌ في الفندق ٥ ليالٍ، فإنّهُ يدفعُ: ....دينار
- إذا أقامَ أمينٌ في الفندق ٩ ليالٍ، هل كان العرض الذي اختاره أفضل من العرض الأول ؟
- ما أقل عدد ممكن من الليالي يقيم أمينٌ في الفندق؛ ليكونَ العرضُ الذي اختاره أقلَّ تكلفةً ؟

نشاط ٢

أَحلُّ المُتبايِنَةَ: ٢(س – ١) < ٣، وأُمثِّلُ مجموعةَ الحلّ على خطّ الأعداد.

- أُطبقُ خواص التباين: ٢س – ٢ < ٣ .
- أَحلُّ المتباينة: ٢س < .... اذن س < ....
- مجموعةُ الحلّ هي: ....
- أُمثّلُ مجموعةَ الحلّ على خطّ الأعداد:
- الفترةُ التي تُمثّلُ مجموعةَ الحلّ هي: ....

نشاط ٣

لَدى مُزارعٍ حديقةٌ منزليّةٌ مِساحتُها ٣٥٠ م^٢، ولَديْهِ سياجٌ من الأسلاك طولُهُ ٦٠ م.
استخدمَ المُزارعُ كاملَ هذا السياجَ لتسييجِ جزءٍ مستطيلِ الشكلِ من حديقتهِ، لا تقِلُّ مِساحتُه عن ٢٠٠ م^٢، أُكملُ:

محيط المستطيل= ٢س + ٢ص ، حيث: س = طول المستطيل ، ص = عرض المستطيل.

إذن: ..... + ... = ٦٠

ص= (٣٠ – س)

مِساحة المستطيل= س × ص

أحلُّ المتباينة: س (٣٠ – س) ≥ ......

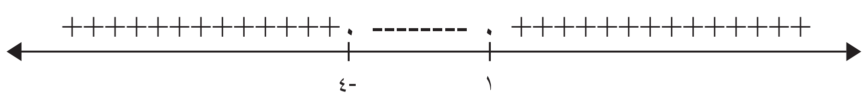
الأبعادُ المُمْكنةُ للجزء الذي تمّ تسييجُهُ من الحديقة:

س: ....

ص: ....

مثال(١): ما مجموعةُ حلّ المتباينة: س^٢ + ٣س < ٤ ؟

- س^٢ + ٣س – ٤ < صفر (لماذا)
- س^٢ + ٣س – ٤= (س – ١) (س + ٤)



مجموعةُ حلّ المتباينة هي:] -٤ ، ١ [، ويمكنُ كتابتُها: -٤ < س < ١

أتعلّمُ: يُمكنُ كتابةُ مجموعةِ الحلّ على شكل فترة، أو باستخدام علاقات الترتيب < أو >

نشاط ٤

أحلُّ المتباينة: $س^{٢} + س - ١٢ \geq$ صفر .

أُحدّدُ إشارةَ العبارة: $س^{٢} + س - ١٢$، وأُعيّنُ ذلك على خطّ الأعداد:

مجموعةُ حلِّ المتباينةِ وَفقَ إشارتها ($\geq$ صفر) هي: ....

أكتبُ مجموعةُ الحلّ بطريقة أخرى: ....

نشاط ٥

أحلُّ المتباينةَ: $س^{٢} - ٦س + ٩ >$ صفر.

أعيّنُ إشارةَ العبارة: $س^{٢} - ٦س + ٩$، وأعيّنُ ذلك على خطّ الأعداد:

مجموعة حلّ المتباينةِ وفقَ إشارتها ($>$ صفر) هي: ....

أكتبُ مجموعةُ الحلّ بطريقة أخرى: ....

تمارين ومسائل:

(١) ما مجموعةُ حلّ المتبايناتِ الآتية؟

أ) $٢ (س + ١) \geq ٣ (س - ١)$

ب) $س^{٢} + س + ١ >$ صفر

(٢) ما هي الأعداد التي مربعُ كل منها أصغرُ من العدد نفسه ؟

(٣) أكتبُ المتباينةَ من الدرجة الثانية التي تظهرُ مجموعةُ حلّها على خطّ الأعداد الآتي:

(٤) محلٌ لبيعِ الفطائر حدّدَ ربحَهُ بالعلاقة:

الربح = $-١٠٠ (س - ١,٧٥)^{٢} + ٣٠٠$ ، حيثُ س سعرُ بيعِ الفطيرةِ الواحدة، فكم ديناراً يربحُ صاحبُ المحلّ (يزيد الربح كلما كان سعر الفطيرة أقل):

أ) إذا باع الفطيرة بسعر ١,٥ دينار.

ب) إذا باع الفطيرة بسعر ٣,٧٥ دينار.

جـ) ما السعرُ الذي يُمكنُ أنْ يبيعَ به الفطيرةَ؛ ليكونَ ربحُه أكثرَ من ٢٧٥ ديناراً ؟

(١ - ٦) الاقتراناتُ متعدّدةُ القاعدة (Piecewise Functions)

نشاط ١

تُشجّعُ وِزارةُ التربيةِ والتعليمِ الرِّحْلاتِ الترفيهيّةِ والعلميّةِ، ليقومَ الطلبةُ بزيارة الأماكنِ الأثريّةِ، والتعليميّةَ، والترفيهيّةِ في فلسطينَ، ومن الأماكنِ الترفيهيّةِ التي يزورُها الطلبةُ مدنَ الملاهي، التي تعملُ على اجتذاب الزائرين، بإعلان خصميّات على سعر تذاكر الدخول. عمدَتْ إحدى مدن الملاهي إلى نشر الإعلان الآتي للزائرين:

مجموع سعر التذاكر (بالدينار)	عدد الأفراد
عدد الأفراد × ١٠	١ ≤ عدد الأفراد < ٥
(عدد الأفراد × ٥) + ٢٠	٥ ≤ عدد الأفراد < ١٠
(عدد الأفراد × ٣) + ٤٠	١٠ ≤ عدد الأفراد < ٤٠
١٥٠	٤٠ ≤ عدد الأفراد

- المبلغُ الذي تدفعُهُ عائلةٌ مكوّنةٌ من ٤ أفراد = ...
- المبلغُ الذي تدفعُه عائلةٌ مكونةٌ من ٨ أفراد = ...
- المبلُغ الذي تدفعُه مجموعةٌ مكوّنةٌ من ١٨ طالباً = ...
- المبلغُ الذي يدفعُهُ ٥٥ طالباً = ...
- المبلغُ الذي تدفعُه كلُّ مجموعةٍ من الأشخاص يتغيّرُ بتغيُّرِ ....

تُسمى مثل هذه العلاقة اقتراناً متعدد القاعدة

نشاط ٢

من الأمثلة على الاقترانات متعددة القاعدة:

١) $$ق(س) = \begin{cases} س + ١ ، & س \geq ١ \\ ٢س ، & س < ١ \end{cases}$$

٢) $$ق(س) = \begin{cases} ٢س ، & س \leq -٥ \\ ٤ ، & -٥ < س < ٥ \\ س - ٣ ، & س \geq ٥ \end{cases}$$

٣) أعطِ مثالاً لاقتران متعدد القاعدة

تمثيلُ الاقترانات متعددة القاعدة بيانيّاً:

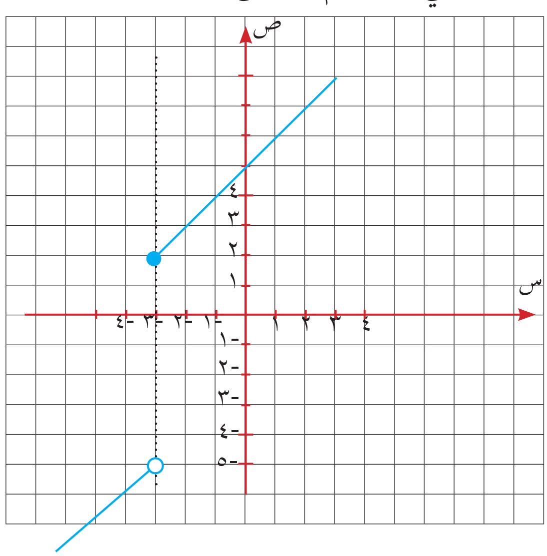
نشاط ٣

أمثّلُ بيانيّاً الاقترانَ الذي قاعدتُه: $$ق(س) = \begin{cases} س - ٢ ، & س < -٣ \\ س + ٥ ، & س \geq -٣ \end{cases}$$

أُكملُ الجدولَ الآتي:

س	-٨	-٦	-٤	-٣	-٢	-١	٠	٣	٥
ص		-٨		٢			٥		

- أعيّنُ النقاطَ في المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران.



نشاط ٤ أمثّلُ بيانيّاً الاقترانَ الذي قاعدتُه: ق(س) =

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} + ٥ &،\quad \text{س} \leq -٣ \ ^{*} \\ ٢\text{س} &،\quad -٣ < \text{س} < ١ \\ \text{س}^{٢} &،\quad \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

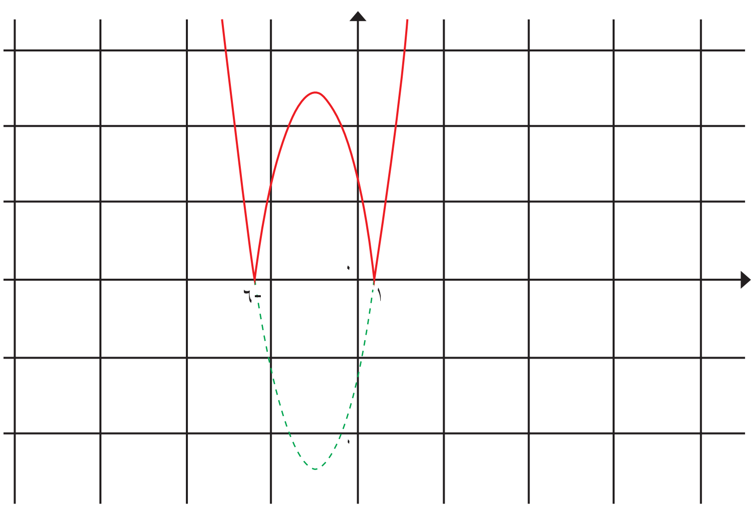
أكملُ الجدولَ الآتي:

س	-٨	-٦	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص		-٧		-١		-٢		١				

أعيّنُ النقاط في المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران:

مثال: أُمثّلُ بيانياً الاقتران ق(س) =

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٦ &،\quad \text{س} \leq -٦ \\ -(\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٦) &،\quad -٦ < \text{س} < ١ \\ \text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٦ &،\quad \text{س} \geq ١ \end{cases}$$



* عند التمثيل البياني لاقتران متعدد القاعدة يتم تعويض نقطة التحول في القاعدتين ونضع دائرة مفتوحة عند القاعدة التي لا تنتمي إليها النقطة.

تمارين ومسائل:

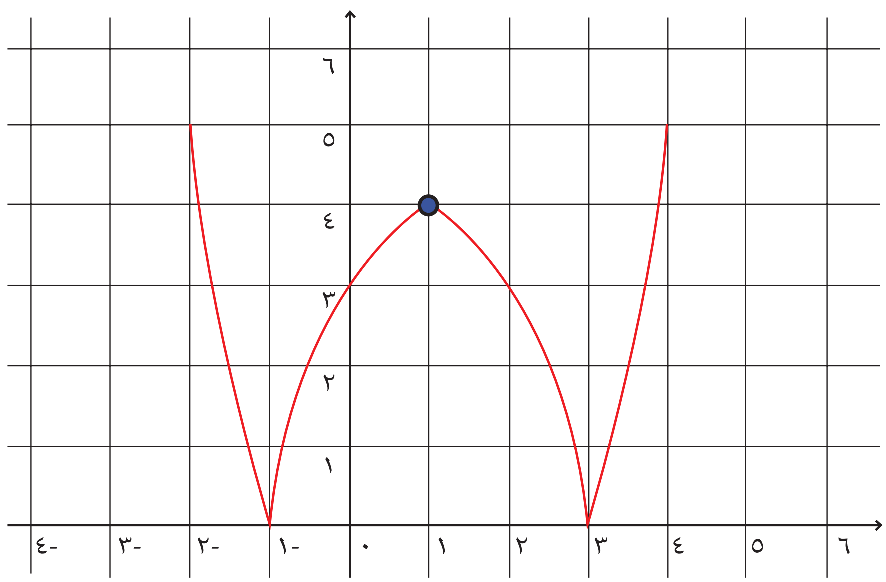
(١) أرسمُ منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية:

$$ق(س) = \begin{cases} ٣ \quad ، & س < -٤ \\ س \quad ، & -٤ \le س \le ٢ \\ -س + ٦ \quad ، & س > ٢ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س + ١ \quad ، & س < صفر \\ س^{٢} \quad ، & س \ge صفر \end{cases}$$

(٢) للاقتران الذي يظهرُ منحناه في المستوى الديكارتي أدناه:

- ما إحداثيّاتُ نقطةِ الرأس؟ وما معادلةُ محور تماثُل المنحنى؟



(١ - ٧) اقتران القيمة المُطْلقة* (Absolute Value)

نشاط ١

المحافظة على جسمٍ سليمٍ تساعد في بناء عقلٍ سليم، والكتلة عند أبناء الجيل الواحد تكون متقاربةً بالمعدل، فكانت كتلة ليلى (٦٠كغم)، وكتلة مها (٥٥كغم)، وعند إيجاد الفرق بين كتلتيْهما يكون الفرق المطلق يساوي:

|٦٠ − ٥٥| = |٥٥ − ٦٠| = ...

هناك كميّاتٌ لا يمكن أنْ تكون إلّا على صورةٍ واحدة، وهي الصورة الموجبة. أعط أمثلةً أخرى لكميّاتٍ لا يمكن أن تكون إلّا موجبة: ....

نشاط ٢

أجد ناتج ما يأتي:

| -٣ | = ...   ، | ٤ | = ...   ، | - $\frac{١}{٢}$ | = ...

| ٤ − ٣ | = ...   ، | -١ − -٤ | = ...   ، | ٠ − ١٢ | = ...

تعريف

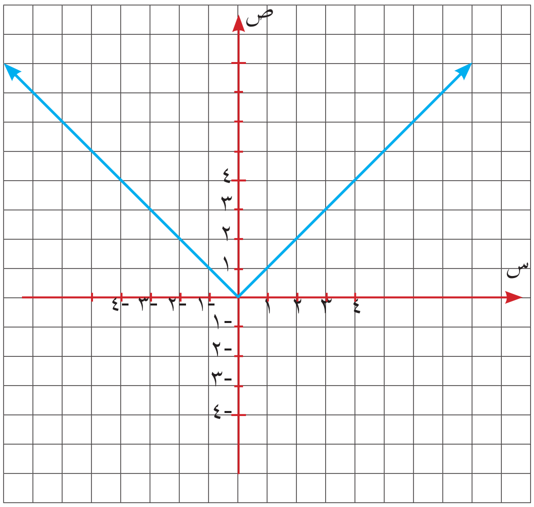
يُسمّى الاقتران المكتوب على صورة ق(س) = | س | **اقترانَ القيمةِ المُطْلَقة**، ويمكن كتابة الاقتران ق(س)، دون استخدام رمز القيمة المُطلقة، كما يأتي:

$$ق(س) = |س| = \begin{cases} س &، \quad س \geqslant صفر \\ -س &، \quad س < صفر \end{cases}$$

* يعتبر اقتران القيمة المطلقة من الاقترانات متعددة القاعدة.

نشاط ٣

عند تمثيل الاقتران ق(س) = | س | في المستوى الديكارتي يظهر كما في الشكل:



أجب عمّا يلي:

أ) مجال الاقتران هو ح.

ب) مدى الاقتران هو ....

جـ) أرسم محور التماثل.

د) أحدّد صفر الاقتران ....

هـ) هل الاقتران واحد لواحد؟ لماذا؟

و) هل الاقتران زوجياً أم فردياً أم غير ذلك؟

نشاط ٤

أُعيدُ تعريف الاقتران ق(س) = | س − ٣ |، دون استخدام رمز القيمة المطلقة ثم أمثله بيانياً:

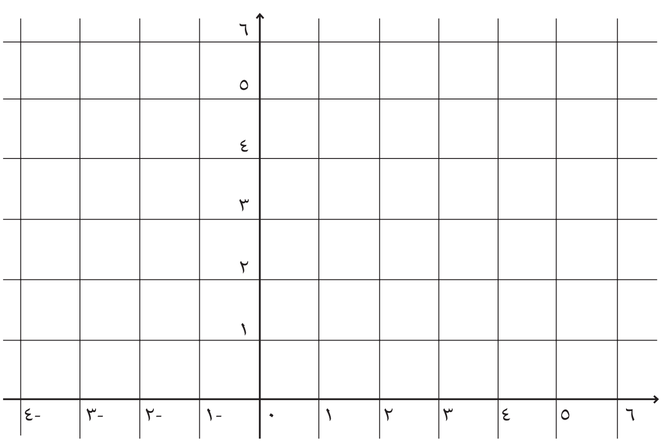
ق(س) = { س − ٣ ، س − ٣ ≤ صفر
-(س − ٣) ، س − ٣ < صفر

ق(س) = { س − ٣ ، س ≤ ٣
-س + ٣ ، س < ٣

مجال ق(س): ....

مدى ق(س): ....

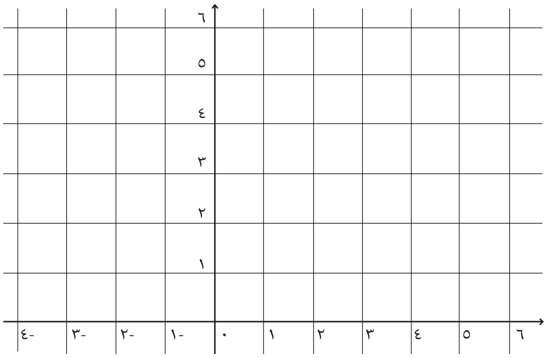
منحنى ق(س) = | س − ٣ |
انسحاب لمنحنى | س | ....
وحدة إلى ....



نشاط ٥

أمثل باستخدام التحويلات الهندسية ق(س)= | س | + ١

منحنى ق(س) هو انسحاب لمنحنى | س | بمقدار .... إلى ....



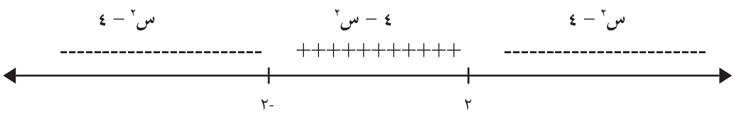
نشاط ٦

أعيد تعريف ق(س) = | ٤ − س٢ | ثم أمثله بيانياً.

| ٤ − س٢ | = { ٤ − س٢ ، ٤ − س٢ ≥ ٠
س٢ − ٤ ، ٤ − س٢ < ٠ .

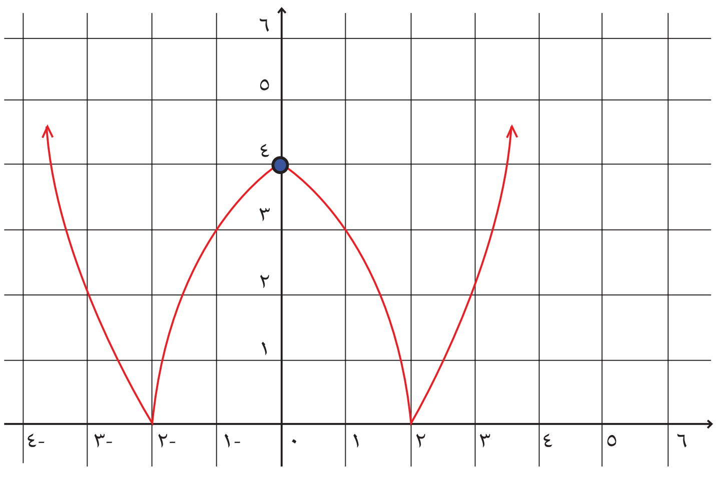
لحل المتباينات نبحث في إشارة ٤ − س٢

٤ − س٢ = (٢ − س) (٢ + س)



| ٤ − س٢ | = { .... ، س < -٢
٤ − س٢ ، -٢ ≤ س ≤ ٢
س٢ − ٤ ، س > ....

التمثيل:



تمارين ومسائل:

(١) إذا كان: ق(س) = |س − ٣|، هـ (س) = |٢ − ٣س|، أجد:

ق(٢) ، ق(-٥) ، هـ (-١) ، هـ (٠) ، ق $\left(\frac{٢}{٣}\right)$

(٢) ١) أُعيدُ تعريف الاقترانات الآتية، دون استخدام رمز القيمة المطلقة وأمثلها بيانياً:

أ) ق(س) = |٣س + ٢| ب) ق(س) = |٤ − س|

جـ) ق(س) = -|٣س + ٣| د) ق(س) = |١ − $\frac{١}{٢}$ س|

٢) أجد مجال ومدى وأصفار الاقترانات السابقة.

(٣) أُمثّل منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية باستخدام التحويلات الهندسية:

أ) ق(س) = |س + ٢|

ب) ق(س) = -|س|

جـ) ق(س) = -|س − ٣| + ٢

(٤) أُعيد تعريف كل من ثم أمثلها في المستوى الديكارتي:

أ) ق(س) = | ٥س − س^{٢} |

ب) ق(س) = | س^{٢} − ٥س + ٦ |

(١ - ٨) اقترانُ أكبرِ عددٍ صحيح (Greatest Integer Function)

نشاط ١

لِضمانِ حقوقِ العمّالِ والموظفين، ضِمْنَ قانونِ الضمان الاجتماعي، شجّعَ الرئيسُ الفِلَسطينيُّ إنشاءَ الجمعيّاتِ الاستهلاكيّةِ، والتموينيّة؛ لتشجيعِ الشراءِ، واستهلاكِ الموادِّ التموينيّةِ الوطنيّة. تمنحُ هذه الجمعياتُ زبائِنَها نقاطَ شراءٍ، إذْ تقومُ الجمعيّةُ بتسجيلِ عددِ نقاطِ شراء، بحيث يساوي العددَ الصحيحَ من قيمةِ مشترياتِ الزبونِ من الموادّ التموينيّة الوطنيّة، دون اعتبارٍ لمنازل الأجزاء العشريّةِ من تلك القيمةِ، وتُحفظُ تلك النّقاطُ في ملفٍّ خاصٍّ بالزبون، وفي نهاية كلِّ شهرٍ تقومُ الجمعيّةُ بإعطاءِ الزبونِ وثيقةً تتضمَّنُ عددَ النّقاطِ الممنوحةِ له، ليقومَ باستبدالها ببعض المشتريات من الجمعية.

أُكملُ الجدولَ الآتيَ بنقاطِ شراءِ زبونٍ في أحد الأسابيع:

قيمة المشتريات	١١٧,٤	٢٥٠,٥	٢٥٠,٨	١٢٠	١٢٠,٦	٢٩,٩	٣٢٤,٨	٣٥,٥	٣٥,١	٨٥,٩
عدد نقاط الشراء				١٢٠					٣٥	

تعريف: أكبرُ عددٍ صحيحٍ للعدد الحقيقيّ س: هو أكبرُ عددٍ صحيحٍ أقلّ من أو يساوي العددَ س، ويُرمَزُ له بالرّمز [ ].

نشاط ٢

أكملُ الجدولَ الآتي :

[٢٢,٥]	[٥٩,٩]	[٣٢]	[٧,٣-]	[٢٧-]	[١,٦-]	[٦٨]	[١٨,٥-]	[٠,٧-]
٢٢			٨-			٦٨		

أتعلّمُ: لكلِّ س ∈ ح ، [س] = ن ، حيث ن ≤ س < ن + ١ ، ن ∈ ص.

إذا كان ق(س) = [أ س + ب] ، فإنّ [أ س + ب] = ن ، حيث ن ≤ أ س + ب < ن + ١.

مثال (١): أحلُّ المعادلة: [٢س + ١] = ٧

الحلّ: ٧ ≤ ٢س + ١ < ٨

٦ ≤ ٢س < ٧ ومنها ٣ ≤ س < ٣,٥

نشاط ٣

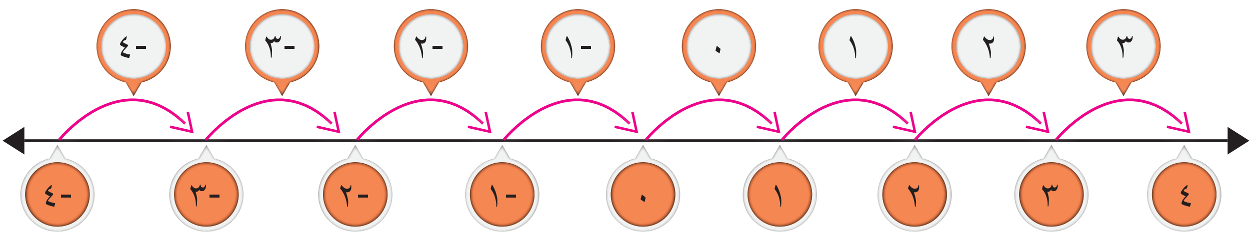
أحلُّ المعادلة: [١ − ٢س] = ١ و أمثّلُ مجموعةَ الحلّ على خطّ الأعداد

- أضعُ المعادلةَ على شكلِ متباينةٍ بالصورة ....
- أحلُّ المتباينة الناتجة.

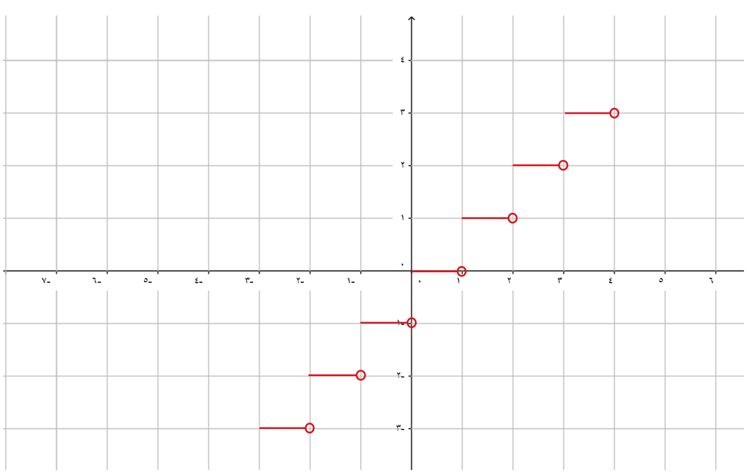
مثال (٢): أكتبُ ق (س) = [س]، باعتباره اقتراناً متعدّدَ القاعدة، ثمّ أمثّلُهُ في المستوى الديكارتي.

الحل: أصفارُ الاقتران هي: [س] = صفر: صفر ≤ س < ١

طولُ الفترةِ الجزئيّة: صفر ≤ س < ١ يساوي ١



ق(س) = {
.
.
-٢ ، -٢ ≤ س < -١
-١ ، -١ ≤ س < ٠
٠ ، ٠ ≤ س < ١
١ ، ١ ≤ س < ٢
٢ ، ٢ ≤ س < ٣
.
.



ألاحظُ: . نظراً لشكل منحنى الاقتران في المستوى يُطلَقُ عليه الاقتران السُّلَمي

. يسمى المقدارُ $\frac{١}{|\text{معامل س}|}$ طول درجة الاقتران

نشاط ٤

أكتبُ الاقتران: ق(س) = [٢س]، باعتباره اقتراناً متعددَ القاعدة، في الفترة [-١ ، ١]

- طول الدرجة = $\frac{١}{٢}$
- أصفار الاقتران: [٢س] = صفر إذن صفر $\leq$ ٢س $<$ ١
- أكتبُ ق(س) باعتباره اقتراناً متعددَ القاعدة = { ....
- أمثّلُ منحنى الاقتران بيانيّاً.

نشاط ٥

أكتبُ الاقتران الذي قاعدته: ق(س) = [٣ − $\frac{١}{٢}$ س] ، في الفترة [-٢ ، ٧] ،

باعتباره اقتراناً متعددَ القاعدة، ثمّ أمثّلُهُ بيانيّاً في المستوى الديكارتي.

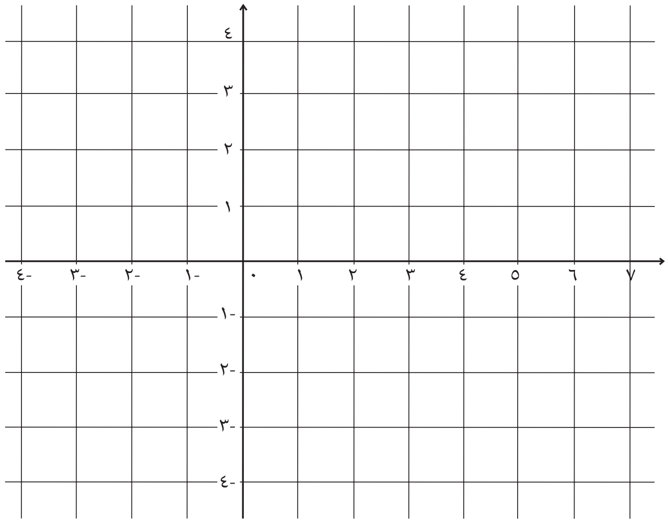
- طول درجة الاقتران ق = ...
- أصفار الاقتران: [٣ − $\frac{١}{٢}$ س] = صفر ⇐ صفر $\leq$ ٣ − $\frac{١}{٢}$ س $<$ ١

وعليه: .... $<$ س $\leq$ ....

- أكتبُ الاقتران ق(س)، باعتباره اقتراناً متعددَ القاعدة:

$$ق(س) = \begin{cases} \vdots & \\ ١ ، & ٢ < س \leq ٤ \\ ٠ ، & ٤ < س \leq ٦ \\ -١ ، & ٦ < س \leq ٧ \end{cases}$$

• أُمثلُ منحنى الاقتران، في المستوى الديكارتي.



أتعلّمُ: الاقتران ق(س) = [-س] هو انعكاس للاقتران ق(س) = [س] في محور الصّادات.

تمارين ومسائل:

(١) أحلُّ المعادلات الآتية:

أ) [٣س + ١] = ٤

ب) [٣ − ٢س] = -٤

(٢) أمثل كلٍّ من الاقترانات الآتية ؟

أ) ق(س) = [١٠ − ٥س]

ب) هـ(س) = [س − ٣]

جـ) ق(س) = [$\frac{١}{٣}$س + ٢]

(٣) أتحقّقُ من خطأ العبارات الآتية، بأمثلةٍ عددية:

أ) جـ × [ﺃ] = [جـ × ﺃ] ، حيث ﺃ ، جـ أعداد حقيقيّة.

ب) [س + ١,٥] = [س] + ١,٥

(١ - ٩): تمارين عامّة

السؤال الأول:

أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(١) أيٌّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ فرديّ ؟

أ) $ق(س) = س^{٣} - س^{٢}$ ب) $هـ(س) = \sqrt{س}$

جـ) $ل(س) = ١ - س^{٣}$ د) $ع(س) = س^{٣} + س$

(٢) أيٌّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ زوجيّ ؟

أ) $ق(س) = س^{٣}$ ب) $هـ(س) = س^{٥} - س$

جـ) $ل(س) = س^{٤} - ١$ د) $ع(س) = س^{٤} + س$

(٣) ما قاعدة الاقتران الناتجة من انسحاب منحنى ق(س) وَحدتين إلى اليسار، ثم وَحدتين إلى الأعلى ؟

أ) $ق(س) + ٤$ ب) $ق(س) - ٤$ جـ) $ق(س + ٢) + ٢$ د) $ق(س - ٢) + ٢$

(٤) ما صورة منحنى ق(س) المعكوس في محور السينات، من منحنيات الاقترانات الآتية ؟

أ) $ق(-س)$ ب) $-ق(-س)$ جـ) $-ق(س)$ د) $ق(س - ١)$

(٥) أيٌّ من العبارات الآتية عبارة صائبة ؟

أ) محور السينات محور تماثل للاقتران الفردي. ب) محور الصادات محور تماثل للاقتران الفردي.

جـ) محور السينات محور تماثل للاقتران الزوجي. د) محور الصادات محور تماثل للاقتران الزوجي.

(٦) ما طول درجة الاقتران $ق(س) = [\![٣ - ٢س]\!]$ ؟

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) ٢ د) ١

(٧) أيٌّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ نسبيّ ؟

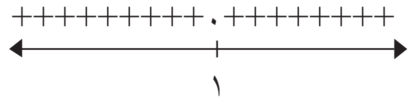
أ) $\frac{٣}{\sqrt{س}}$ ب) $\frac{س^{\frac{٢}{٣}} - ١}{س}$ جـ) $\frac{١}{س}$ د) $\sqrt{\frac{س - ١}{س}}$

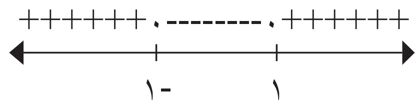
(٨) محور تماثل ق(س) = | ١٠ − ٢س | ، هو الخط المستقيم:

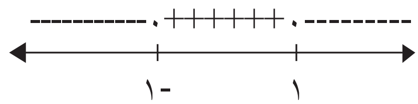
أ) س = ٥　　ب) س = -٥　　جـ) ص = ٥　　د) ص = -٥

(٩) أيٌّ من الآتية خطُّ إشارة الاقتران ق(س) = (س − ١) (١ − س) ؟

أ)


ب)


جـ)


د)


(١٠) ليكن: ق(س) = |٣س + ٤| فما قيمة ق(-٣) ؟

أ) -٥　　ب) ٣　　جـ) ٥　　د) ١٣

السؤال الثاني:

أتحقّقُ من أنّ: حاصل ضرب اقترانيْن فرديّيْن هو اقترانٌ زوجيّ.

السؤال الثالث:

أُمثّلُ منحنياتِ الاقتراناتِ الآتيةَ بيانيّاً مستعيناً بالتحويلات الهندسية الملائمة:

أ) ت(س) = $س^{٢}$ + ٣　　ب) هـ(س) = $(س + ٣)^{٣}$

جـ) ل(س) = - ($س^{٣}$ − ١)　　د) ك(س) = $س^{٢}$ + ٦س + ٦

هـ) ع(س) = $\sqrt{س - ٤}$ ، س ≥ ٤

السؤال الرابع:

أبحثُ في إشارة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ل(س) = س^{٢} + ٣س + ٢

ب) م(س) = ٨ − ٢س

جـ) ق(س) = $\frac{\text{ل(س)}}{\text{م(س)}}$، م(س) ≠ صفر.

السؤال الخامس:

أجدُ مجموعةَ حلّ المتباينة: (س − ١)^{٢} − ٤ ≤ صفر، ثم أُمثّلُها على خطّ الأعداد.

السؤال السادس:

أكتبُ الاقترانات الآتية، باعتبارها اقتراناتٍ متعدّدةَ القاعدة ثم أمثلها في المستوى الديكارتي:

أ) ق(س) = | ٦ + ٢س |

ب) ل(س) = | س^{٢} − ٢٥ |

جـ) ك(س) = ⟦ $\frac{١}{٢}$س − ٣ ⟧

د) ع(س) = ⟦ ٥ − $\frac{١}{٣}$ س ⟧

السؤال السابع:

طارق صاحب محلات لبيع الملابس الرياضية، طلب من محاسب محلاته تزويده بعلاقة رياضية تربط ربحه السنوي بسعر القطعة. وبعد دراسة الوضع لاحظ المحاسب أن المحل يبيع عدداً أكبر من القطع عندما يخفض السعر، لكن ربحه يتغير حسب المعادلة:

ص = -١٥س^{٢} + ٦٠٠س + ٥٠   حيث س سعر الزي الرياضي بالدينار.

- جد ربح التاجر إذا باع الزي الرياضي بسعر ٢٥ دينار.
- جد ربح التاجر إذا باع الزي الرياضي بسعر ٤٢ دينار.
- حدد مجال الأسعار التي تحقق ربحاً للتاجر.
- ما هو السعر الذي يحقق للتاجر أعلى ربح.

أُقيّمُ ذاتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	دون المتوسط
تمييز بين الاقتران الزوجي والاقتران الفردي			
رسم الاقترانات باستخدام التحويلات الهندسية			
تحديد اشارة اقتران نسبي			
حل متباينة تربيعية بمتغير واحد			

فكرةٌ رياديّة:

قدّمتْ شركةُ اتصالاتٍ فِلَسطينيّةٌ عرضاً للاشتراك معها: العرض الأول يدفع المشتركُ ٢٠ ديناراً مبلغاً ثابتاً، إضافة إلى ٢٠ قرشاً، عن كلِّ دقيقةِ اتصالٍ، أو جزءٍ منها.

العرض الثاني: يدفع المشتركُ ٣٠ ديناراً مبلغاً ثابتاً، إضافة إلى ١٠ قروش، عن كلِّ دقيقةِ اتصالٍ، أو جزءٍ منها.

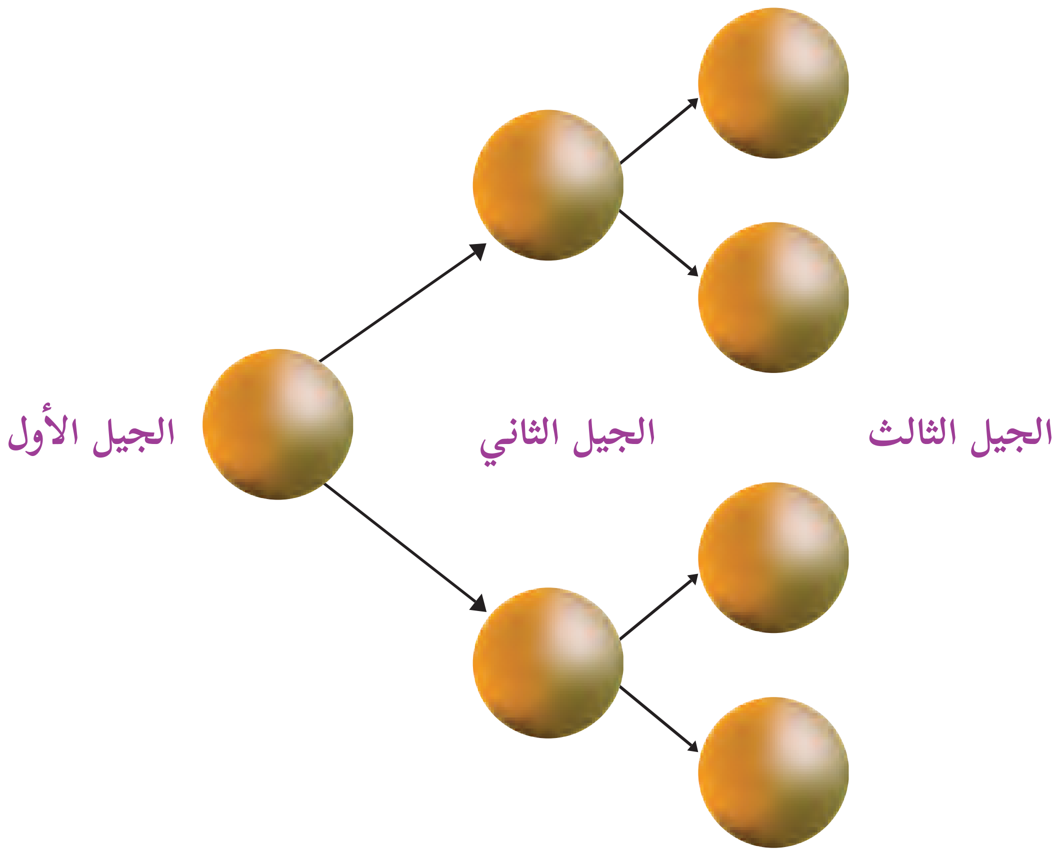
أرادَ أميرٌ الاشتراكَ مع هذه الشركة.

- أُبيّنُ العلاقاتِ الرياضيّةِ اللازمةِ، لتنصحَ أميراً في اختيار العرضِ المناسبِ له.

روابط الكترونية:
www.alentum.com
www.desmos.com/calculator

الوحدة الثانية ٢

الأُسس واللوغاريتمات
Logarithm and Exponential



(تكاثر البكتيريا)

أفكّرُ: تتضاعفُ بعضُ أنواعِ خلايا البكتيريا، بحيث تصبحُ الخليّةُ الواحدة خليتيْن كلَّ دقيقة.

كم يصبحُ عددُ الخلايا الناتجةِ من تضاعُفِ خليّةٍ واحدةٍ بعد ساعةٍ واحدة؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاقترانات الأسّية واللوغاريتمية في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- التعرّف إلى مفهوم اللوغاريتم وعلاقته بالأُسس.
- استنتاج قوانين اللوغاريتمات.
- حلّ معادلات أسّية أو لوغاريتمية.
- تمثيل الاقترانات الأسّيَة بيانيّاً.
- استنتاج خصائص الاقتران الأسّي.
- تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانياًّ.
- استنتاج خصائص الاقتران اللوغاريتمي.
- توظيف التحويلات الهندسيّة المختلفة في رسم الاقترانات اللوغاريتمية والأسّيّة.
- استنتاج العلاقة بين الاقترانين الأسّي واللوغاريتمي.

(٢ - ١) الأسس واللّوغاريتمات

نشاط ١

قررت وزارة التربية والتعليم العالي الفلسطينية تصميم مجموعة لمدارس التعلم الذكي، بحيث اشترطت عل كل عضو إضافة عضو آخر كل أسبوع. إذا بدأت المجموعة بـ (١٠) أعضاء، أكمل الجدول الآتي:

عدد الأيام	٠	٧	١٤	٢١	٢٨		
عدد الأعضاء	١٠	٢٠		٨٠		٣٢٠	

عدد الأعضاء بعد ٥٦ يوماً = ... عضواً.

يبلغ عدد الأعضاء ٣٢٠ عضو بعد ...... يوماً تقريباً.

أناقش

عدد الأيام ليصبح عدد أعضاء المجموعة ١٢٨٠ عضو.

عدد الأعضاء بعد شهرين من تصميم المجموعة.

نشاط ٢

أكملُ الجدولَ الآتي:

المقدار	$٢^{٣}$	$٣^{-٢}$	$٨^{\frac{٢}{٣}}$	$٤^{٠}$	$٥^{٩} \div ٥^{٧}$	$٢^{\frac{١}{٢}}$	$٤^{٣} \times ٤^{-١}$
قيمة المقدار	٨	$\frac{١}{٩}$					

تعريف: إذا كان ص = $أ^{س}$ ، حيث ص، أ ∈ $ح^{+}$ ، أ ≠ ١، نسمي س لوغاريتم العدد ص للأساس أ، ويُعَبَّر عنه رياضيّاً: $لو_{أ}$ (ص) = س (الصّورة اللّوغاريتميّة)، ويُقرأ لوغاريتم ص للأساس أ يساوي س. المثال الآتي يوضّح العلاقة بين الصّورة الأُسِّيَّة، والصّورة اللّوغاريتميّة:

الصّورة الأُسِّيَّة	الصّورة اللّوغاريتميّة
$١٠^{٣}$ = ١٠٠٠	٣ = لو$_{١٠}$ ١٠٠٠

الأس

الأساس

العدد

نشاط ٣

أُكْمِلُ الجدول الآتي بما يناسبه:

الصّورة الأُسِّيَّة	$٢^{٣}$ = ٨		$٣^{-٤} = \frac{١}{٨١}$	$٩^{٠}$ = ١
الصّورة اللّوغاريتميّة	______	لو$_{١٠}$ (١٠٠٠٠) = ٤		لو$_{٩}$ ١ = ٠

نشاط ٤

أحول الآتي من الصّورة الأُسِّيَّة إلى الصّورة اللّوغاريتميّة:

أ) $٣^{١}$ = ٣ ب) $٢^{١}$ = ٢ جـ) $٣^{٠}$ = ١

د) $٥^{٠}$ = ١ هـ) $٣^{٤}$ = ٨١ و) $٢^{٥}$ = ٣٢

أ) لو$_{٣}$ (٣) = ١ ب) لو$_{٢}$ (٢) = ____ جـ) لو$_{٣}$ (١) = صفر

د) لو$_{٥}$(١) = ______ هـ) لو$_{٣}$ ٨١ = ٤ د) لو$_{٢}$ ٣٢ = ____

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: لو$_{م}$ (م) = ١، لو$_{م}$ (١) = صفر، لو$_{م}$ $م^{س}$ = س

نشاط ٥

أَجِدُ قيمة اللّوغاريتمات الآتية:

١) لو$_{٢}$ $(٢^{٦})$ = ٦.

٢) لو$_{٧}$ $(\sqrt{٧})$ = __________.

٣) لو$_{٣}$ $(\frac{١}{٩})$ = ____________.

نشاط ٦

أُكْمِلُ الجدول الآتي ثم أُجيب عما يليه:

س	٢		٨	١٦	٣٢
لو$_٢$ (س)	١	٢	٣	٤	٥
لو$_٤$(س)	$\frac{١}{٢}$			٢	

(١) لو$_٢$ (٢ × ٤) = لو$_٢$ (٨) = ٣ ، لو$_٢$ (٢) + لو$_٢$ (٤) = ١ + ٢ = ٣

(٢) لو$_٢$ (٢ × ٨) = ________ ، لو$_٢$ (٢) + لو$_٢$ (٨) = ________

(٣) لو$_٤$ (٢ × ٤) = ________ ، لو$_٤$ (٢) + لو$_٤$ (٤) = ________

(٤) لو$_٤$ (٢ × ٨) = ________ ، لو$_٤$ (٢) + لو$_٤$ (٨) = ________

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: إذا كان س، ص عددَيْنِ حقيقيَّيْن موجبيْن، وكان أ عدداً حقيقيّاً موجباً غير الواحد، فإنَّ: لو$_أ$ (س × ص) = لو$_أ$ (س) + لو$_أ$ (ص).

نشاط ٧

أُكْمِلُ الجدول الآتي ثم أُجيب عما يليه:

س	٣		٢٧	٨١	
لو$_٣$ (س)	١	٢			٥

(١) لو$_٣$ ($\frac{٨١}{٢٧}$) = لو$_٣$ (٣) = ١ ، لو$_٣$ (٨١) − لو$_٣$ (٢٧) = ٤ − ٣ = ١

(٢) لو$_٣$ ($\frac{٢٤٣}{٩}$) = ____________ ، لو$_٣$ (٢٤٣) − لو$_٣$ (٩) = ____________

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: إذا كان س، ص عددَيْنِ حقيقيَّيْن موجبيْن، وكان أ عدداً حقيقيّاً موجباً غير الواحد،

فإنَّ: لو$_{أ}$ $\left(\frac{س}{ص}\right)$ = لو$_{أ}$ (س) − لو$_{أ}$ (ص)

نشاط ٨

قام كل من عمر وندى بإيجاد قيمة كلٍّ من: لو$_{٣}$(٣×٣) ، لو$_{٣}$(٣)^{٢} ، كالآتي:

ندى	عمر
لو$_{٣}$ (٣ × ٣) = لو$_{٣}$(٣) + لو$_{٣}$(٣)	لو$_{٣}$(٣)^{٢} = ٢ لو$_{٣}$ ٣
= ١ + ١ = ٢	= ٢ × ١ = ٢

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: إذا كان ص عدداً حقيقيّاً موجباً، فإنَّ: لو$_{أ}$ (ص)^{م} = م لو$_{أ}$ (ص)، بحيث م ∈ ح*.

نشاط ٩

أكتب كل ممّا يأتي بصورة لوغاريتم واحد:

١) (لو$_{أ}$ (٨) − لو$_{أ}$ (ص)) = لو$_{أ}$ $\left(\frac{٨}{ص}\right)$

٢) (لو$_{أ}$ (٤) + لو$_{أ}$ (س)) − (٣ لو$_{أ}$ (٢)) = لو$_{أ}$ (٤ س) − لو ________

= ______________

نشاط ١٠

إذا كان لو$_{أ}$ (٧) = ٢,٨١ ، أَجِدُ قيمة كل مما يأتي:

١) لو$_{أ}$ (٢٨)　　　٢) لو$_{أ}$ (٧)^{٣}　　　٣) لو$_{أ}$ (٣,٥)^{٢}

١) لو$_{٢}$ (٢٨) = لو$_{٢}$ (٤×٧) = لو$_{٢}$ (٤) + لو$_{٢}$ (٧) = ٢ + ٢,٨١ = ٤,٨١

٢) لو$_{٢}$ (٧)^{٣} = ___ × لو$_{٢}$ (٧) = ٣ × ______ = ٨,٤٣

٣) لو$_{٢}$ (٣,٥)^{٢} = لو$_{٢}$ ( )^{٢} = __________

= __ × (لو$_{٢}$ ( ) − لو$_{٢}$ ( )) = __________

نشاط ١١

أُكْمِلُ حلّ المعادلة الآتية:

أ) ٢^{س} = ٦٤

الطّريقة الأُسّيَّة	الطّريقة اللّوغاريتميّة
٢^{س} = ٦٤	لو$_{٢}$ (٦٤) = س
________ = _______	لو$_{٢}$ (٢)^{٦} = _______
ومنها: س = ٦	٦لو$_{٢}$ (٢) = س
	٦ × ١ = س، ومنها: س = ٦

ماذا تلاحظ؟

مثال: أحل المعادلة: لو$_{٢}$ (س + ٢) − لو$_{٢}$ (س − ١) = ٢

الحل: لو$_{٢}$ (س + ٢) − لو$_{٢}$ (س − ١) = لو$_{٢}$ $\frac{\text{س}+٢}{\text{س}-١}$ = ٢

$$\frac{\text{س}+٢}{\text{س}-١} = ٢^{٢}$$

س + ٢ = ٤(س − ١)

س = ٤س − ٤ − ٢ ، ومنها: س = ٢

نشاط ١٢

أحلّ المعادلة: $\text{لو}_{١٠}(\text{س}) + \text{لو}_{١٠}(٣) = ٢$

$\text{لو}_{١٠}(\qquad) = ٢$

$١٠^{٢} =$ ______

$١٠٠ =$ ______

$\text{س} = \frac{١٠٠}{٣}$

نشاط ١٣

طلبت معلّمة الرياضيّات من رؤى وربى إيجاد قيمة $\text{لو}_{\frac{١}{٧}}(٤٩)$ ، أيّ منهما إجابتها صحيحة، وأذكرُ السَّبب.

رؤى	ربى
$\text{لو}_{\frac{١}{٧}}(٤٩) = \text{ص}$	$\text{لو}_{\frac{١}{٧}}(٤٩) = \text{ص}$
$٤٩^{\text{ص}} = \frac{١}{٧}$	$(\frac{١}{٧})^{\text{ص}} = ٤٩$
$(٧^{٢})^{\text{ص}} = ٧^{-١}$	$(٧^{-١})^{\text{ص}} = ٧^{٢}$
$٧^{٢\text{ص}} = ٧^{-١}$	$٧^{-\text{ص}} = ٧^{٢}$
$٢\text{ص} = -١$	$\text{ص} = -٢$
$\text{ص} = -\frac{١}{٢}$	

تمارين ومسائل:

(١) أحسبُ قيمة كل من:

أ) لو$_{٢}$ (٦٤)　　　　ب) لو$_{٣}$ (٨١)

(٢) أُحوّلُ من الصّورة الأُسِّيَّة إلى اللّوغاريتميّة:

أ) ٢^{٤} = ١٦　　　　ب) ٠,١٠ = ١٠$^{-١}$

(٣) أُحوّلُ من الصّورة اللّوغاريتميّة إلى الصّورة الأُسِّيَّة:

أ) لو$_{٦}$ ١ = ٠　　　　ب) لو$_{١٠}$ (٠,٠٠١) = - ٣

(٤) إذا كان لو$_{٢}$ (٧) = ٢,٨١ ، لو$_{٢}$ (٥) = ٢,٣٢ ، أَجِدُ قيمة ما يأتي:

أ) لو$_{٢}$ (٣٥)　　　　ب) لو$_{٢}$ $\left(\frac{٧}{١٠}\right)$

(٥) أَجِدُ قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

أ) لو$_{٢}$ $\sqrt{٣٢}$ + لو$_{٢}$ $\sqrt{٢}$　　　　ب) لو$_{٣}$ (٨١) − لو$_{٣}$ (٩)　　　　جـ) لو$_{٥}$ (٥^{٢})^{٣}

(٦) أَكْتُبُ ما يأتي بصورة لوغاريتم لمقدار واحد:

أ) ٣ لو$_{٥}$ (س + ٦) − $\left(\frac{١}{٣}\right)$ لو$_{٥}$ (٥ − س).

ب) ٧لو$_{٣}$ (أ) + لو$_{٣}$ (ب) − ٢لو$_{٣}$ (٨جـ).

(٧) أَجِدُ مفكوك كلِّ لوغاريتم ممّا يأتي، حيث س، ص عددان حقيقيّان موجبان:

أ) لو$_{٥}$ $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٥}$　　　　ب) لو$_{٢}$ (٣س^{٢})

(٨) أَحُلُّ المعادلاتِ الآتية:

أ) لو$_{٢}$ (٧س) = لو$_{٢}$ (س^{٢} + ١٢)   ب) لو$_{١٠}$ (٥س^{٢} − ٣) − لو$_{١٠}$ (س^{٢} + ١) = ٠

(٩) لقياس مدى احتفاظ الطلبة بالمعلومات، يتم اختبارهم بعد وقت من تعلُّمها، ويمكن تقدير علامة الطالب في اختبار للرياضيّات باستخدام العلاقة:

ص = س − ٦لو$_{٢}$ (ت + ١)، حيث ت عدد الأشهر الّتي مضت بعد انتهاء الفصل الدراسيّ، س علامة الطالب في نهاية الفصل الدراسي، إذا حصل إبراهيم على العلامة ٨٥، أجد:

أ) قدِّر علامة إبراهيم بعد مضيّ ثلاثة أشهر.

ب) بعد كم شهر يكون تقدير علامة إبراهيم ٦٧.

(٢ - ٢) الاقتران الأسّي (Exponential Function)

نشاط ١

يُحكى أنّ حكيماً قدّم رقعةَ شطرنج هديةً إلى ملك بلاد الفرس، فأراد الملكُ مكافأتَه. فطلب الحكيمُ أنْ تكونَ مكافأتَه مَلءَ مربعاتِ رقعةِ الشطرنجِ بالقمح؛ بحيثُ يضعُ حبّةً في الخانة الأولى، وحبتيْنِ في الخانة الثانية، وأربعَ حبّاتٍ في الخانة الثالثة وهكذا، ضحك الملكُ وحاشيتُه من طلب الحكيم المتواضع.

أُكملُ: عددُ حبّاتِ القمحِ في الخانة الرابعة = ٨

عدد حبات القمح في الخانة الخامسة = ...

عدد حبّاتِ القمح في الخانة السادسة = ...

- إذا علمت أنّ الكيلوغرام من القمح يحتوي على ٧٠٠٠ حبةٍ تقريباً. أُقدّرُ كميّةَ القمحِ التي طلبها الحكيم. هل نتوقّعُ أن يتمكّنَ الملكُ من مكافأةِ الحكيم؟ أُفسِّرُ إجابتي.

أتعلم: يُسمّى الاقترانُ اقتراناً أسّيّاً إذا كان على الصورة: ق(س) = $أ^{س}$ ، أ ≠ ١ ، أ > ٠ ، س ∈ ح

أناقش **لماذا** أ > ٠ ، أ ≠ ١ ؟

نشاط ٢

أيٌّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ أُسّيٌّ ؟

ألاحظُ انّ: ق(س) = ٢^{س} اقترانٌ أسّيٌّ؛ لأنّ ....

بينما هـ(س) = (-٣)^{س} ليس اقتراناً أسياً؛ لأن الأساس ﺃ = -٣ > ٠ .

وعليه فإنّ: ل(س) = س^{٢} هو اقترانٌ ....؛ لأنّ المتغير ليس أساً.

م(س) = $(\frac{١}{٦})^{س}$ هو اقترانٌ ....؛ لأنّ ....

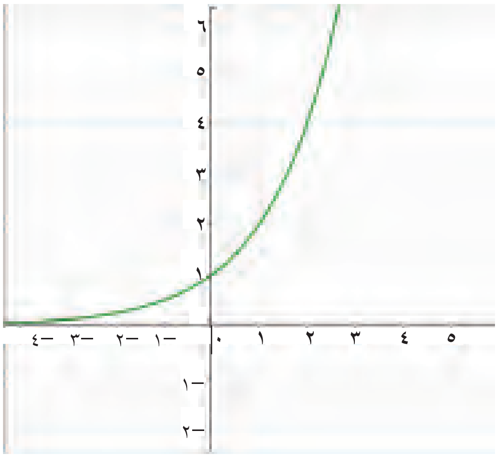
نشاط ٣

أمثّلُ الاقترانَ: ق(س) = ٢^{س} ، س ∈ ح في المستوى الديكارتي.

أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي:

س	٣	٢	١	٠	-١	-٢	
ق(س)	٨			١	$\frac{١}{٢}$		$\frac{١}{٨}$

• أعيّنُ النّقاطَ من الجدول السابق في المستوى الديكارتي، وألاحظُ شكل منحنى الاقتران:



من التمثيل البياني لمنحنى الاقتران، أتعلّمُ أهم خصائص منحنى الاقتران الأسّي (ﺃ > ١):

١) مدى الاقتران الأسّي هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (ح +).

٢) منحنى الاقتران يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ١).

٣) كلّما زادت قِيمُ س تزداد قيمَ ص المُناظِرةُ لها.

أفكر هل يقطعُ منحنى الاقتران ق محور السينات؟

نشاط ٤

أُكملُ الجدولَ الآتيَ لِقِيَم س ، ص للاقتران هـ(س) = $٣^{س}$، ثمّ ارسمُ منحنى الاقتران:

س	٣	٢		٠	-١	-٢	
هـ (س)			٣			$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$

- أدوِّن ملحوظاتي حول منحنييّ الاقترانين هـ(س)= $٣^{س}$ و ق(س) = $٢^{س}$

نشاط ٥

أُكملُ الجدولَ الآتيَ لِقِيَمِ س ، والاقتران ق(س) ، ثم أرسمُ منحنى الاقتران.

س	٣	٢	١		-١		-٣
ق(س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$	$\frac{١}{٨}$			١	٢	٤	

أعيّنُ النقاطَ على المستوى الديكارتي، وأرسم منحنى الاقتران.

- ألاحظُ من الرسم أنّ: منحنى ق(س) = $٢^{س}$ هو انعكاس لمنحنى الاقتران هـ(س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ في محور الصادات، أوضح ذلك جبريّاً.
- من التمثيل البياني للاقتران في النشاط السابق، ألاحظُ أهمَّ خصائص الاقتران الأسّي: ق(س) = $أ^{س}$ ، ٠ < أ < ١ وهي:

١) مدى الاقتران الأسّي هو: ....

٢) يقطعُ منحنى الاقتران محورَ الصادات في النقطة: ....

٣) كلما زادت قيم س، فإنّ قيمَ ص المناظِرَةَ لها ....

نشاط ٦

أمثّلُ منحنى الاقتران هـ(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ بيانيّاً على المستوى الديكارتي.

أدوّنُ ملحوظاتي حول منحنييّ الاقترانين: هـ(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ و ق(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$

أمثّلُ الاقتران ق(س) = $٣^{س}$ + ٢ في المستوى الديكارتي.

نشاط ٧

أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي:

س	٣	٢		٠		-٢	-٣
ص= ق(س)	٢٩		٥		$٢\frac{١}{٣}$	$٢\frac{١}{٩}$	

- أعيّنُ النقاطَ في الجدول السابق على المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران.
- **ألاحظُ أنّ:** الاقتران ق(س) = $٣^{س}$ + ٢هو انسحاب لمنحنى الاقتران هـ(س) = $٣^{س}$ وَحدتين إلى الأعلى.

أتعلّمُ: يُمكنُ تطبيقُ جميعِ التحويلاتِ الهندسيّةِ التي تعلمتُها على الاقتران الأسّي.

الاقتران الأسّيّ الطبيعيّ

الاقتران الأسّي الطبيعي: هو اقترانٌ أسّيٌّ يكون أساسُه العددَ هـ ، حيثُ هـ عددٌ غيرُ نسبي له أهمية خاصة في الرياضيات ويسمى العدد النيبيري نسبة إلى (John Napier) ويساوي تقريباً ٢,٧١٨٢٨

نشاط ٨

إذا كان ل(س) = $هـ^{س}$ ، أجدُ قيمةَ ما يأتي، مُقرّباً لأقربِ منزلتيْن عشريتيْن، باستخدام الآلة الحاسبة.

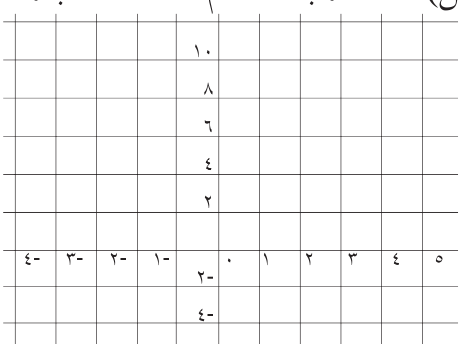
أ) ل(٢) = $هـ^{٢}$ = ٧,٣٩

ب) ل(٤) + ٢ = $هـ^{٤}$ + ٢ = ...

نشاط ٩

أكملُ الجدولَ الآتيَ لقيم س ، ق(س) للاقتران ق(س) = $هـ^{س}$، باستخدام الآلة الحاسبة، ثمّ أرسمُ منحنى الاقتران:

س	٣	٢	١	$\frac{١}{٢}$	٠	-١
ق(س)		٧,٣٩		١,٦٥		



تمارين ومسائل:

(١) أيٌّ من الاقترانات الآتية يُعَدُّ اقتراناً أُسّيّاً ؟ مع بيان السبب.

أ) ق(س) = ٥^س^

ب) م(س) = ٤^-س^

جـ) هـ(س) = ٢س^٣^

د) ص = (-٢)^س^

هـ) ص = ($\frac{٢}{٣}$)^س^

(٢) أمثّلُ منحنى الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي، وأجدُ مدى كل اقتران منها:

أ) ص = ٣^س^ − ٢

ب) ص = ٥ − ٢^س^

جـ) ص = ٤^-س^

د) ص = -($\frac{١}{٤}$)^س^

(٣) استخدمُ منحنى ق(س) = هـ^س^، والتحويلات الهندسيّة المناسبة لرسم الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = هـ^-س^

ب) ق(س) = ٣ − هـ^س^

جـ) ق(س) = هـ^(س-١)^

(٤) أجدُ قيمةَ كلٍّ من: ﻫ ، ب لمنحنى ق(س) = ﻫ (٣)^س^ + ب، الذي يمرُّ بالنقطتين: (١،٣) ، (٠،٢).

(٥) أُدخِلَتْ سيدةٌ مجمّعَ فلسطينَ الطبيّ في مدينة رام الله، لارتفاع نسبة الالتهاب في جسمها. أُعطِيتْ جَرْعةٌ من البنسلين في الدم. لوحظ أن ٦٠٪ من جَرْعة البنسلين فقط بقيت في الدم بعد مرور ساعةٍ على تناولها. وعند متابعة حالتها لوحظ أنّ جسمَها يُدمّرُ البنسلينَ بالنّمطِ نفسِه، وفي نهاية كلِّ ساعة يتبقى فقط ٦٠٪ من البنسلين الموجود في نهاية الساعة السابقة.

إذا أُعطيَتِ السيدة ٣٠٠ ملغرام من البنسلين الساعة الثامنة صباحاً، أُكملُ الجدول الآتي (بعد نقله إلى دفتر الإجابة)، لحساب كمية البنسلين في الدم نهايةَ كلّ ساعة، خلال الفترة بين الثامنة والحادية عشرة صباحاً:

الساعة	٨:٠٠ صباحاً	٩:٠٠ صباحاً	١٠:٠٠ صباحاً	١١:٠٠ صباحاً
البنسلين (ملغرام)	٣٠٠			

أُمثلُ البيانات السابقة في المستوى الديكارتي، وأُلاحظُ الشكل الناتج.

(٢ - ٣) الاقتران اللوغاريتمي (Logarithmic Function)

نشاط ١

يستخدمُ مشفى المُطّلع في مدينة القدس مادة اليود (١٣١) المشعة في تشخيص أمراض الغدة الدرقية، عِلماً بأنّ المادةَ تخسرُ نصفَ كتلتِها خلال ٨ ايام (تسمى هذه الفترة فترة عمر النصف). فإذا حصل المشفى على ٢غم من اليود (١٣١)، أجيب عما يأتي:

أكملُ الجدولَ الآتي:

عدد الأيام	٨ أيام	١٦ يوماً	
مقدار المادة المتبقية			$\frac{١}{٤}$ غم

أفكر

تبقّى من المادة بعد مضي ٢٠ يوماً .... تقريباً.

يلزم من الوقت كي تصبحَ كتلتها ٠,٠٠١ غم .... تقريباً.

نشاط ٢

أجدُ قيمةَ ما يأتي:

$\text{لـو}_{٤}\ ٦٤$ = ...

$\text{لـو}_{١٠}\ ١٠٠$ = ...

$\text{لـو}_{٨}\ ١$ = ... ، $\text{لـو}_{٣}\ ٣$ = ... ، $\text{لـو}_{٧}\ \frac{١}{٤٩}$ = ...

أتعلم: الاقتران على الصورة ق(س) = $\text{لـو}_{أ}$ س ، حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١ ، س > ٠ .
يُسمّى اقتراناً لوغاريتميّاً.

أناقش **لماذا أ > ٠ ، أ ≠ ١ ؟**

ملحوظة: من اللوغاريتمات الأكثر شيوعاً اللوغاريتم ذو الأساس ١٠، ويُسمّى اللوغاريتم العادي، ويُكتبُ عادةً على الصورة ص= لـو س ، س > ٠ (لا يُكتبُ له الأساس ١٠).

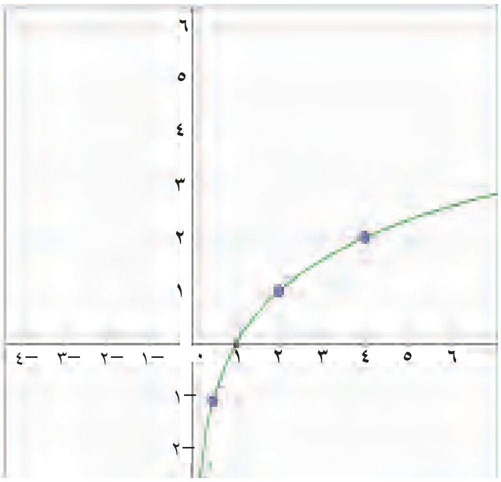
وإذا كان الأساسُ العدد هـ يُسمّى اللوغاريتم الطبيعي، ويُكتب على الصورة: ق(س) = $لـو_{هـ}$ س.

نشاط ٣ أكوِّنُ جدولاً لقيم س ، ق(س) المناظرة لها، للاقتران ق(س) = $لـو_{٢}$ س، ثم أرسمُ منحنى الاقتران.

س	٨	٤		١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	
ق(س) = $لـو_{٢}$ س	٣		١			-٢	-٣

أتذكرُ أنّ: $لـو_{٢}$ $\frac{١}{٤}$ = -٢ لأن ٢$^{-٢}$ = $\frac{١}{٢^{٢}}$ = $\frac{١}{٤}$.

أعيّنُ النقاط في المستوى البياني، وأرسمُ منحنى الاقتران ، كما هو في الشكل (٢-٣):



من منحنى الاقتران ص= لـو$_{٢}$س ، ألاحظُ خصائصَ الاقتران ص= لـو$_{أ}$س، حيث أ > ١ :

- مجال الاقتران اللوغاريتمي هو: .... ومداه هو: ....
- نقطة (أو نقاط) تقاطع منحنى الاقتران مع محوريّ الإحداثيات هي: ....
- كلما زادت قيمُ س فإنّ قيمَ ص المناظِرة لها ....

نشاط ٤

أرسم منحنى ص = ٢^{س} على المستوى المرسوم عليه منحنى الاقتران ص= لـو$_{٢}$س ثم أقارنُ بين منحنييّ الاقترانين.

نشاط ٥

أمثّلُ منحنى الاقتران ق(س) = لـو$_{٢}$س − ١ في المستوى الديكارتي ، وأقارنُ منحناه مع منحنى الاقتران هـ(س) = لـو$_{٢}$س.

أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي:

س	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$
ق(س) = لـو$_{٢}$س − ١	٣ − ١ = ٢	١			-٢	

أرسمُ منحنى الاقتران.

ألاحظُ أنّ منحنى ق(س) = لـو$_{٢}$س − ١ ، هو انسحابٌ لمنحنى الاقتران هـ(س) = لـو$_{٢}$س وَحدةً واحدةً إلى الأسفل.

أتعلّمُ: بشكلٍ عام، يُمكنُ تطبيقُ جميعِ التحويلات الهندسيّة التي تعلمتها على الاقتران اللوغاريتمي.

نشاط ٦

أكوِّنُ جدولاً لقِيَمِ س ، ق(س) المناظِرةِ لها للاقتران ق(س) = لـو$_{\frac{١}{٢}}$س ، ثم أرسمُ منحناه:

س	٨	٤	٢	١		$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$
ق(س) = لـو$_{\frac{١}{٢}}$س		-٢		٠	١		

من منحنى الاقتران ق(س) = لـو$_{\frac{١}{٢}}$س ، أستنتجُ خصائصَ الاقتران ص= لـو$_{أ}$س، حيث ٠ < أ < ١.

- ألاحظُ أنّ: الاقتران ق(س) = لـو$_{\frac{١}{٢}}$س، هو اقترانٌ مجالُه .... ، ومداه ....
- تقلُّ قيمُ ق(س) كلّما زادت قيمُ س المناظِرةُ لها، ويمرُّ منحناه في النقطة (١ ، ٠).

أناقش

ما العلاقةُ بين منحنى ق(س) = لـو$_{\frac{١}{٢}}$س ومنحنى هـ (س) = لـو$_{٢}$س؟ أتحقّقُ من العلاقة التي توصلتُ إليها جبريّاً.

نشاط ٧

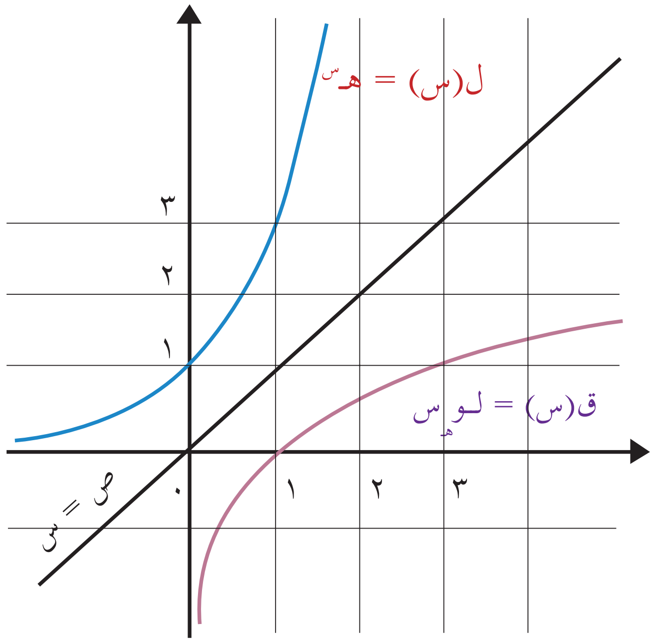
أكوّن جدولاً لقيم س ، هـ(س) المناظرة لها للاقتران هـ(س) = لـو$_{\frac{١}{٣}}$س، ثم أرسمُ منحنى هذا الاقتران على منحنى ق(س) = لـو$_{\frac{١}{٢}}$س ، وأقارنُ بينهما.

س	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	
هـ(س) = لـو$_{\frac{١}{٣}}$س	-٢				٢	٣

مثال(١): بالاعتماد على منحنى الاقتران الأسّيّ الطبيعيّ ل(س) = هـ^{س} ، وخصائص منحنى الاقتران اللوغاريتمي، أرسمُ منحنى الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ق(س) = لـو$_{هـ}$س

الحلّ: عرفت من النشاط السابق أن منحنى الاقتران ق(س) = لـو$_{هـ}$س ، هو انعكاسٌ لمنحنى ص = هـ^{س} في المستقيم ص = س.

نرسم منحنى ل(س) = هـ^{س} ، ثم نرسمُ انعكاسَه في الخط المستقيم ص = س ، فيكون لدينا منحنى الاقتران، كما هو في الشكل المجاور.



نشاط ٨

أجدُ مجالَ كلٍّ من الاقترانات الآتية:

- ق(س) = لـو$_{٢}$ (س – ٣)
- هـ(س) = لـو$_{٣}$ (س^{٢} – ١)

مجال الاقتران اللوغاريتمي هو ح$^{+}$، فإن مجال ق(س) معرّفٌ عندما س – ٣ > ٠
مجال ق(س) هو : ....

أما مجال هـ (س) فهو معرّفٌ عندما س^{٢} – ١ > ٠
وعليه فإن: مجال هـ (س) هو : ....

تمارين ومسائل:

(١) احسب قيمة ما يأتي:

أ) لـو$_{٣}$ ٧٢٩

ب) لـو$_{٥}$ ٠,٠٤

جـ) لـو ٠,٠٠٠١

(٢) مستعيناً بالتحويلات الهندسية ومنحنى الاقتران ق(س) = لـو$_{٢}$س، أمثّلُ الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي:

أ) هـ(س) = لـو$_{٢}$س − ١

ب) ل(س) = لـو$_{٢}$ (س + ٢)

جـ) م(س) = -لـو$_{٢}$ (س + ١)

(٣) أجدُ مجال كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = لـو$_{هـ}$ (٥س − س^{٢})

ب) ق(س) = لـو$_{٢}$ $\sqrt{٢س − ٣}$

(٤) بدأ عالمٌ تجربته بـ ٥٠٠٠٠٠٠ خليةٍ، ولاحظ أنّ ٤٥٪ من الخلايا تموت كلَّ دقيقة. كم تستغرق من الزمن حتى يصبح عددها أقلَّ من ١٠٠٠ خلية؟

(٢ - ٤): تمارين عامّة

السؤال الأوّل:

أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(١) ما قيمة $لو_{٥}$ ١٢٥ ؟

أ) ٥ ب) ٣ جـ) ١ د) -٥

(٢) أيُّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ أسّيٌّ ؟

أ) $\left(\frac{-١}{٣}\right)^{س} - ٢$ ب) $س^{٣}$ جـ) $(-هـ)^{س}$ د) $٥^{س}$

(٣) أيُّ العبارات الآتية عبارة صائبة بالنسبة للاقتران $ق(س) = ٣^{س}$؟

أ) مجال الاقتران ومداه هما مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

ب) مجال الاقتران هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ح، بينما مداه هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ح+ .

جـ) مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (ح+)، بينما مداه هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ح.

د) مجاله ومداه هما مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ح.

(٤) أيُّ الاقترانات الآتية هو انعكاس لمنحنى الاقتران $ق(س) = ٢^{س}$ في محور الصادات؟

أ) $هـ(س) = لو_{٢}س$ ب) $هـ(س) = -(٢^{س})$ جـ) $هـ(س) = ٢^{-س}$ د) $ل(س) = هـ^{س}$

(٥) إذا كان $ق(س) = أ^{س}$ ، حيث $أ > ١$ ؟ فإن إحدى العبارات الآتية صائبة بخصوص منحنى ق:

أ) يقطعُ محوريّ الإحداثيات في النقطتين: (٠،١) ، (١،٠) على الترتيب.

ب) يقطعُ محور الصادات في النقطة (٠،١).

جـ) يقطعُ محور السينات في النقطة (١،٠).

د) لا يقطعُ أيّاً من المحورين.

(٦) أيُّ الاقترانات الآتية ليس اقتراناً لوغاريتمياً ؟

أ) ق(س) = لـو$_{\frac{١}{٣}}$س   ب) ق(س) = لـوس

جـ) ق(س) = لـو$_{هـ}$س   د) هـ(س) = لـو$_{١}$س

(٧) أيُّ العبارات الآتية عبارة خاطئة حول منحنى الاقتران ق(س) = لـو$_{٣}$س ؟

أ) كلما زادت قيمة س زادت قيمة ص المناظرة لها.

ب) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣^{س} في محور الصادات.

جـ) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) = لـو$_{\frac{١}{٣}}$س في محور السينات.

د) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣^{س} في الخط المستقيم ص = س.

(٨) ما مجال الاقتران ق(س) = لـو (س^{٢} − ١) ؟

أ) مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الموجبة ح+ .

ب) مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي للفترة]-١،١[.

جـ) مجموعة جميع الأعداد الحقيقية ما عدا [-١،١].

د) مجموعة جميع الأعداد الحقيقية التي تنتمي للفترة]٠،١[.

(٩) ما الاقتران الناتج من انعكاس منحنى الاقتران ل(س) = هـ^{س} في الخط المستقيم ص = س ؟

أ) ق(س) = هـ^{س}

ب) ق(س) = لـو$_{هـ}$ س

جـ) ق(س) = هـ$^{-س}$

د) ق(س) = - (هـ^{س})

(١٠) ما قاعدة الاقتران ق(س) = لـو$_{٣}$س ، عند إجراء انسحاب وحدتين لليمين ؟

أ) هـ(س) = لـو$_{٣}$ س + ٢   ب) هـ(س) = ٢لـو$_{٣}$ س

ج) هـ(س) = لـو$_{٣}$ (س + ٢)   د) هـ(س) = لـو$_{٣}$ (س − ٢)

(١١)أيٌّ من التحويلات الهندسية الآتية تم الاعتماد عليها لتمثيل ل(س) = ٣ – $\text{لو}_{\text{هـ}}$س باستخدام منحنى ق(س)= $\text{لو}_{\text{هـ}}$س ؟

أ) انسحاب إلى الأعلى ٣ وحدات، ثم انعكاس في محور السينات.

ب) انعكاس في محور الصادات، ثم انسحاب إلى الأعلى ٣ وحدات.

جـ) انعكاس في محور السينات، ثم انسحاب الى اليمين ٣ وحدات.

د) انعكاس في محور السينات، ثم انسحاب إلى الأعلى ٣ وحدات.

السؤال الثاني:

أحسبُ قيمة كلٍّ من الآتية :

أ) $\text{لو}_{٢}$ ١٦ – $\text{لو}_{٢}$ ١٢٨

ب) $\text{لو}_{٤} \frac{١}{٢٥٦}$

جـ) $\text{لو}_{٣}$ ٩ – $\text{لو}_{٣}$ ٢٤ + ٣ $\text{لو}_{٣}$ ٢

د) $\text{لو}_{٤} \sqrt[٥]{٦٤}$

السؤال الثالث:

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي، لأقرب ثلاث منازل عشرية، باستخدام الآلة الحاسبة:

أ) $\text{هـ}^{-٢} + ٣$

ب) $٤\sqrt{\text{هـ}} - ٥$

جـ) $\text{لو}_{١٠} \sqrt[٥]{١٠}$

السؤال الرابع:

يمثلُ الشكل الآتي منحنى الاقتران ق(س) = $أ^{س}$ ، أ ≠ ١

أرسمُ ـ مستعيناً بالشكل ـ منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية، موضحاً الحل:

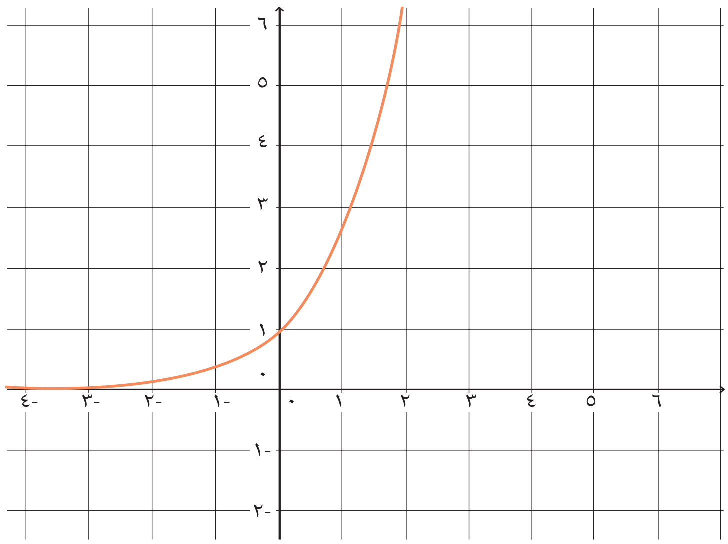
أ) ص = $لو_{أ}$ س

ب) ص = $لو_{أ}$ (س − ١)

جـ) ص = $لو_{\frac{1}{أ}}$ س

د) ص = ١ − ق(س)

هـ) ص = $أ^{(س-١)}$



السؤال الخامس:

أدرسُ سلوك الاقتران ق(س) = لـو (٢س + ٣) من حيث : مجاله ، ومداه ، وكل من مقطعيه السيني والصادي .

السؤال السادس:

إذا كانت العلاقة بين شدّة التيار الكهربائي (ت)، المارّ في سلك بالأمبير، والزمن بالثواني (ﻥ)، تعطى بالعلاقة ﻥ = $لو_{٢}$ ت أمثّلُ بيانياً العلاقة بين شدة التيار والزمن، ثم أجدُ من الرسم شدّةَ التيار بعد زمنٍ قدرُهُ ثانية ونصف. (استخدم برنامج الرسم جيوجبرا GeoGebra في تحديد الزمن).

أُقيّمُ ذاتي:

أعبر بلغتي عن المفاهيم الاكثر اثارة في هذه الوحدة.

فكرةٌ رياديّة:

بالرجوع إلى مركز الإحصاء الفلسطيني، أو شبكة الإنترنت، احصل على عدد سكان بلدتك (قريتك) لهذا العام، ومعدل تزايد السكان، ثم قدّرْ عدد السكان في العام ٢٠٢٥م. أقارنُ الزيادة في أعداد السكان مع الزيادة في معدل النمو الاقتصادي، أبحث عن فكرة رياديّة لزيادة معدل النمو الاقتصادي، أدرس هذه الفكرة من حيث النجاحات والمخاطر، ثم قرر مدى ملاءمتها لتوفير الاحتياجات الضرورية للمواطنين.

تطبيقات حاسوبية:

(١) باستخدام برنامج رسم الاقترانات جيوجبرا (GeoGebra)، أرسمُ منحنى كلٍّ من الاقترانات:

ص = هـ^{س} ، ص = ٢^{س} ، ص = ٣^{س}

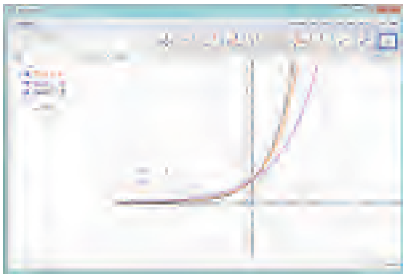
(٢) ما العلاقة بين منحنى الاقتران ص = هـ^{س} ومنحنيي الاقترانين: ص = ٢^{س} ، ص = ٣^{س} ؟

إرشاد: لرسم الاقترانات الواردة في السؤال اتبعْ الخطوات الآتية:

- الدخول إلى شاشة البرنامج.
- إدخال قاعدة الاقتران الأول في شريط الأوامر.

وذلك بطباعة

اضغط زر Enter ⟵ × ⟵ اشارة القوة (^) ⟵ ٢



- لطباعة قاعدة الاقتران ص = ٣^{س}، اتبعْ الخطوات السابقة مع استبدال الرقم ٢ بالرقم ٣.
- لطباعة ص = هـ^{س}، اتبعْ الخطوات السابقة مع استبدال الرقم ٢ بالرمز (e)، واختياره من قائمة الرموز.

ماذا تلاحظ؟

(٣) استخدمْ الحاسوب وبرنامج رسم الاقترانات جيوجبرا لرسم كل من ص = لو$_{هـ}$ س ، ص = هـ^{س} ، وتحقّقْ من صحة رسمك في مثال (١) صفحة ٥٨ .

روابط الكترونية:
www.google.ps/?gws_rd=cr&ei=2j8ZWeKrCcXEwQKS5L3oBg#q=graphic+calcul
https://www.geogebra.org/

الوحدة ٣ الثالثة

الإحصاء والاحتمالات
Statistics and Probability

تفيدُ إحصاءات منظمةِ الصحةِ العالميّةِ أنّ عددَ الأَسِرَّةِ في المستشفيات، مقارنة مع عدد السكان هو سرير لكل ٢٩٤ نسمة، بينما في فلسطين فهو سرير لكل ٧٨٠ نسمة، فإذا تمّ بناء ١٠ مستشفيات خلال عامين، في كل مستشفى ١٠٠ سرير، فما مدى اقتراب فلسطين من النسبة العالمية في عدد الأسرّةِ في المستشفيات، مقارنة مع عدد السكان؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الارتباط ونظرية ذات الحدين في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- رسم شكل الانتشار الذي يمثّل العلاقة بين متغيّريْن.
- إيجاد معامل ارتباط بيرسون.
- إيجاد معامل ارتباط سبيرمان.
- كتابة معادلة الانحدار.
- استخدام مبدأ العد في سياقات حياتيّة.
- حساب التباديل الرائية لمجموعة تحتوي ن من العناصر.
- حساب التوافيق الرائية لمجموعة تحتوي ن من العناصر.
- استخدام نظرية ذات الحدّين في إيجاد مفكوك مقدار جبري.

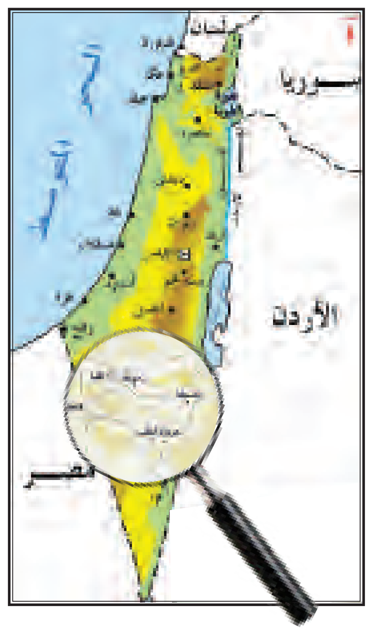
(٣ - ١) الارتباط الخطي (Linear Correlation)

نشاط ١

تُمثِّلُ صحراءَ النقب أكثرَ من ثلث مِساحة فلسطين، فيها العديد من المدن مثل حورة وعرعرة.

ذهب أحمدُ في رحلةٍ مدرسيّةٍ إلى منطقة النقب، وتعرّفَ إلى العديد من المدن الفلسطينية، وعند عودته إلى مدرسته أحضر الخريطة، وبدأ بدراسة توزيع المدن الفلسطينية في تلك المنطقة ليقدم تقريراً عن الرحلة.

أمثّلُ المدن الفلسطينية الآتية: اللقية، رهط، كسيفة، وبئر السبع بنقاط في المستوى الديكارتي.



كيف تتوزعُ المدنُ في المستوى؟

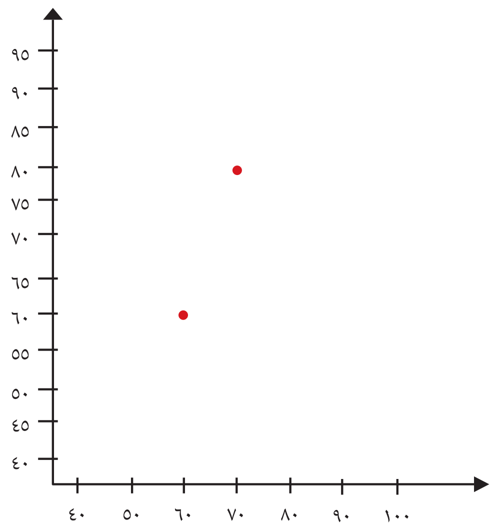
نشاط ٢

في دراسةٍ قام بها معلمُ الرياضيات في مدرسة العودة الثانوية، لمعرفة العلاقة بين علامات مبحثيّ الرياضيات والعلوم لمجموعة من طلبة الصف العاشر، حصل على البيانات في الجدول الآتي:

علامة الرياضيات س	٦٠	٧٠	٥٥	٨٠	٦٥	٧٥	٩٠
علامة العلوم ص	٦٠	٨٠	٥٠	٩٠	٧٠	٧٥	٨٥

أُعيدُ كتابة البيانات في الجدول، على شكل أزواجٍ مرتبة: (٦٠،٦٠) ..... أُكملُ ......

أمثّلُ كلَّ زوجٍ مرتّبٍ بنقطة في المستوى الديكارتي:



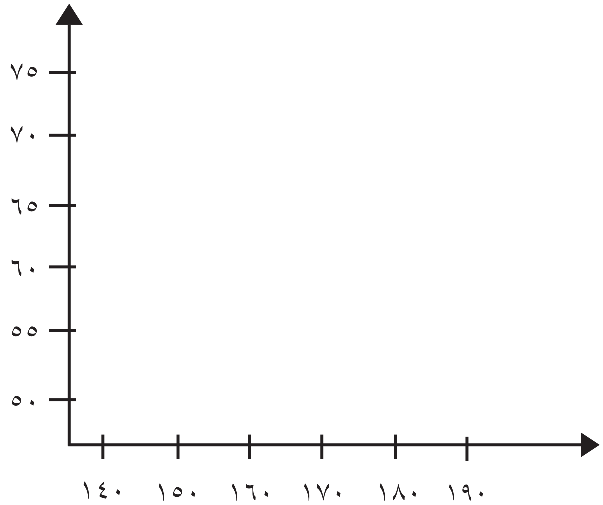
أتعلمُ: الشكل الناتج من تعيين النقاط في المستوى الديكارتي يسمى شكل الانتشار.

نشاط ٣

قام قيس بجمع بيانات حول أطوال مجموعة من طلبة الصف العاشر، وكُتلِهم، فكانت كما في الجدول الآتي:

الطول بالسنتمتر	١٧٠	١٦٠	١٦٥	١٦٠	١٥٥	١٦٢	١٥٠	١٦٧	١٥٨
الكتلة بالكيلوغرام	٧٠	٦٥	٦٢	٦٠	٥٨	٦٠	٥٥	٦٨	٥٦

أمثلُ شكل الانتشار لهذه البيانات:



- هل توجد علاقة بين طول الإنسان وكتلته ؟
- هل يمكنُ رسمُ مستقيم يمرُّ بمعظم النقاط ؟

أتعلمُ: إذا أمكنَ رسمُ مستقيم يمرُّ بمعظم النقاط في شكل الانتشار، فإن العلاقة بين المتغيّريْن خطيّة، وتسمى هذه العلاقة الارتباط الخطيّ.

- هل بالإمكان تحديد قيمة عددية لقوة الارتباط بين المتغيّريْن؟

أستنتج: شكل الانتشار يفيد في تحديد ما إذا كانت هناك علاقة، ونوعها خطيّة، أو غير خطيّة بين متغيّريْن، ولكن لا يكفي للحكم على قوة الارتباط بين المتغيّريْن؛ لأنّ تقديرَه يختلفُ باختلاف الشخص الذي يقومُ بالحكم على قوة الارتباط؛ ولذلك يجبُ استخدامُ طريقةٍ أكثر دقّة، يتمُّ بواسطتها تحديدُ قيمةٍ عدديةٍ لقوة الارتباط بين المتغيّريْن، وهي ما يسمّى معامل الارتباط، وهذا ما سيتم تعلمه في الدرس القادم.

تمارين ومسائل:

١) يمثلُ الجدولُ الآتي علاماتِ مجموعةٍ من الطلبة في مبحثيّ الفيزياء (س)، والكيمياء (ص).
أرسمُ شكل الانتشار، وأبيّنُ نوع الارتباط.

س	٥	٩	٨	١٢	١٠	١١	٢	٤
ص	٧	١٠	٨	١٥	٩	١٣	٤	٦

٢) في الجدول الآتي أعمارُ مجموعةٍ من الأشخاص (س)، وعدد الساعات اليومية التي يمارسون فيها التمارين الرياضية (ص):

س	٣٠	٢٥	٢٢	٢٠	٣٥	٤٠	٥٠	٥٥	٦٠
ص	٣	٢	١,٥	١	٤	٥	٣,٥	٢	١

- أرسمُ شكل الانتشار لهذه البيانات.
- هل يوجد ارتباطٌ خطيٌّ بين عمر الشخص وعدد الساعات اليومية التي يقضيها في ممارسة التمارين الرياضية؟

٣) في محلٍ لبيع الأحذية، وجد صاحبُ المحل أن هناك علاقة بين سعر الحذاء وعدد القطع المَبيعة من ذلك النوع، فسجّل بياناتِهِ في أحد الأشهر، في الجدول الآتي:

سعر الحذاء بالدينار	١٠	٢٠	١٥	١٢	٣٠	٤٠	٢٢	٣٥	٢٥
عدد القطع المبيعة في الشهر	٦٠	٤٠	٢٥	٥٥	١٠	١٥	٢٥	٥	٢٠

أرسم، شكل الانتشار، وأبيّنُ نوع الارتباط.

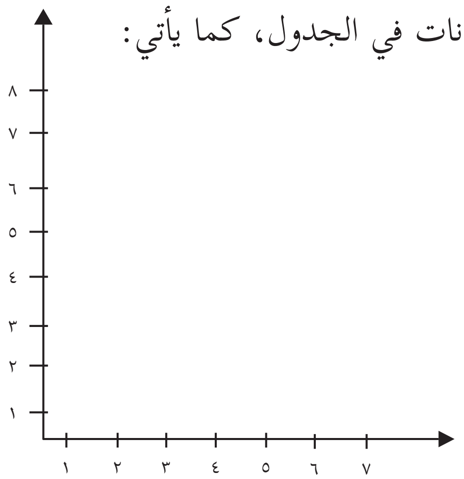
(٣ - ٢) معامل ارتباط بيرسون (Pearson Correlation Coefficient)

نشاط ١

تشتهرُ محافظةُ الخليلِ بزراعةِ العنب، وحسَب إرشاداتِ وزارةِ الزراعةِ الفِلسطينيّةِ، وخبرةِ المزارعين توجدُ علاقةٌ بين عددِ مراتِ حراثةِ الأرضِ ومحصولِ العنب. قام الحاج شحدة بمتابعة قطعة أرضه، فجمع البيانات الآتية:

عدد مرات حراثة الأرض في السنة	١	٢	٣	٤	٥
إنتاج العنب بالطن	٢	٣	٤	٥	٥,٥

أرسمُ شكلَ الانتشار للبيانات في الجدول، كما يأتي:



أناقش

- تزدادُ كميّةُ إنتاجِ العنبِ بزيادة عددِ مرّاتِ حراثة الأرض.
- إذا اتّخذ شكلُ الانتشار خطاً مستقيماً فهناك ارتباطٌ بين المتغيريْن، يُمكنُ التعبيرُ عنه عددياً بمعامل ارتباط، يُسمّى معاملَ ارتباط بيرسون.

تعريف: إذا كانت س ، ص مجموعتين من القيم المتناظرة فيعرّفُ معامل ارتباط بيرسون ر كما يأتي:

$$\text{ر} = \frac{\sum\limits_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}\,\text{ص}_{\text{ك}} - \text{ن}\,\overline{\text{س}}\,\overline{\text{ص}}}{\sqrt{\sum\limits_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}^{2} - \text{ن}\,\overline{\text{س}}^{2}}\;\sqrt{\sum\limits_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ك}}^{2} - \text{ن}\,\overline{\text{ص}}^{2}}}$$

حيث: $\overline{\text{س}}$ الوسط الحسابي لمجموعة قيم س ، $\overline{\text{ص}}$ الوسط الحسابي لمجموعة قيم ص ، ن عدد القيم.

نشاط ٢

خالدٌ ورفاقُهُ في الصف العاشر، يعيشون في حيّ الياسمينة في نابُلْسَ، استلموا علاماتِهم المدرسيّة، بعد اختبارات الشهرين، فأرادوا دراسةَ العلاقةِ بين علاماتهم في مبحثيّ اللغة العربية واللغة الانجليزية، من خلال حساب معامل ارتباط بيرسون.

اللغة العربية س	٢٠	٢٥	٢٠	١٥	٣٠
اللغة الانجليزية ص	٢٥	٢٢	١٨	٢٠	٣٠

أكملُ الجدولَ الآتيَ

	س	ص	$س^٢$	$ص^٢$	س ص
	٢٠	٢٥			
	٢٥	٢٢		٤٨٤	
	٢٠	١٨	٤٠٠		
	١٥	٢٠			
	٣٠	٣٠			٩٠٠
المجموع	١١٠	١١٥		٢٧٣٣	

$\sum_{ك=١}^{ن} س_ك^٢ = \ldots\ldots$ $\sum_{ك=١}^{ن} ص_ك^٢ = \ldots\ldots$ $\sum_{ك=١}^{ن} س_ك ص_ك = \ldots\ldots$

- أحسبُ:

$\bar{س} = \ldots\ldots$ $\bar{ص} = \ldots\ldots$

- أحسبُ معاملَ ارتباطِ بيرسون:

$$ر = \frac{٢٦١٠ - ٥ \times ٢٢ \times ٢٣}{\sqrt{٢٥٥٠ - ٥ \times (٢٢)^٢}\sqrt{٢٧٣٣ - ٥ \times (٢٣)^٢}}$$

$ر = \ldots\ldots$

أتعلمُ: $-١ \leq ر \leq ١$

نشاط ٣

في إحـدى العيـادات الصحيّة تـمّ قيـاسُ ضغـطِ الـدم الأعلى لخمسـةِ مرضـى مـن أعمـارٍ مختلفـة، وبُوبَـت البيانـاتُ فـي الجـدول الآتـي:

العمر س	٥٠	٥٥	٦٠	٤٥	٤٠
ضغط الدم ص	١٢٠	١٤٠	١٣٠	١٥٠	١٣٠

لحسابِ معاملِ ارتباط بيرسون أكوّنُ جدولاً، وأجدُ:

$\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}^{2} = ...$ $\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ك}}^{2} = ...$ $\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}\,\text{ص}_{\text{ك}} = ...$

$\overline{\text{س}} = ...$ $\overline{\text{ص}} = ...$

$\text{ر} = ...$

تمارين ومسائل:

١) حسبَ ثائرٌ معدّلَ درجاتِ الحرارةِ في قريتِه، في الأسابيعِ الثمانيةِ من شهريّ كانون أول وكانون ثاني، وعددّ أُسْطواناتِ الغاز التي تستهلكُها أسرتُه للتدفئة في كلِّ أسبوع، فكانت على النحو الآتي:

درجة الحرارة س	-١	٥	٨	١٢	٠	-٢	١٠	٨
عدد أُسطوانات الغاز ص	٣	٢	٢	١	٢	٣	١	٢

أحسبُ معاملَ ارتباط بيرسون.

٢) قام طلبةُ الصفّ العاشرِ الأساسيّ في مدرسة المجدل الثانوية، بدراسة العلاقةِ بين عددِ أفرادِ الأُسرةِ لَدى طلبةِ الصفّ، وكميّةِ استهلاكِ الماءِ شهريّاً، فجمعوا البياناتِ، وحصلوا على النتائج الآتية، عِلماً بأنّ عددَ الأُسَرِ خمسٌ. أحسبُ معاملَ ارتباط بيرسون.

$$\sum_{ك=1}^{ن} س_ك ص_ك = ٤٩٠ \qquad \sum_{ك=1}^{ن} ص_ك = ١١٠ \qquad \sum_{ك=1}^{ن} س_ك = ٢٠$$

$$\sum_{ك=1}^{ن} ص_ك^2 = ٢٧٠٠ \qquad \sum_{ك=1}^{ن} س_ك^2 = ٩٠$$

٣) أحسبُ معاملَ ارتباطِ بيرسون للبيانات في الجدول الآتي:

س	١٠	٨	٥	١٦	٦	١٥
ص	٩	٧	٥	١٥	٦	١٢

(٣ - ٣) معاملُ ارتباطِ سبيرمان (Spearman Correlation Coefficient)

نشاط ١

تُعدُّ فِلَسطينُ من البلدان ذاتِ النسبِ العاليةِ في عدد المعاقين حركيّاً مقارنةً مع عدد السكان، ويعود ذلك إلى ممارسات الاحتلال، فقد أظهرتْ دراسةٌ قام بها الجهازُ المركزيُّ للإحصاء للعام ٢٠١١، النسبَ المئويةَ للإعاقاتِ الحركّيةِ مقارنةً مع عدد السكان، لبعض المحافظات فكانت كما يأتي:

المحافظة	جنين	طولكرم	بيت لحم	الخليل	طوباس	القدس	غزه
نسبة الاعاقة المئوية	٤,١	٣,٢	٣	٣,٦	٣,١	١,٤	٢,٥

- المحافظة الأقل نسبة في عدد المعاقين حركيّاً....
- أرتّبُ المحافظاتِ من الأعلى إلى الأدنى في نسب الإعاقات، في الجدول الآتي:

الترتيب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
المحافظة	جنين	....	طولكرم	....	....	....	....

نشاط ٢

قام معلمُ الصفِّ الثّالثِ الأساسيّ في مدرسةِ فِلَسطينَ الأساسيّة بدراسة العلاقةِ بين تقديراتِ مبحثيّ اللّغةِ العربيّةِ والرّياضيات، لأربعةِ طلابٍ، ودوّن النتائجَ في الجدول الآتي:

اسم الطالب	سعيد	أيمن	ناجح	شادي
اللغة العربية س	جيد	ضعيف	ممتاز	مقبول
الرياضيات ص	مقبول	جيد	جيد جدا	ضعيف

- أرادَ المعلمُ أنْ يُحدِّدَ العلاقةَ بين تحصيلِ الطلبةِ في مبحثيّ اللغةِ العربيةِ والرياضياتِ، وإيجادَ معاملِ ارتباطٍ بينهما، فهل يستطيعُ إيجادَ معاملِ ارتباطِ بيرسون لهذه البيانات ؟ لماذا؟
- أُعبِّرُ عن البياناتِ الوصفيّةِ بِقِيَمٍ عدديّةٍ، بإعطاءِ رُتَبٍ للطلبة في المبحثيْن.

أُكملُ الجدولَ الآتي:

اسم الطالب	سعيد	أيمن	ناجح	شادي
اللغة العربية س	...	الرابع	الأول	الثالث
الرياضيات ص	الثالث	...	...	...

تعريف: يُعرّفُ معاملُ ارتباط سبيرمان بين متغيرين، ويُرمزُ له بالرّمزِ $ر_{س}$ حسب القانون:

$$ر_{س} = ١ - \frac{٦ \sum_{ك=١}^{ن} ف_{ك}^{٢}}{ن\,(ن^{٢} - ١)}$$ ، حيث :

ف : الفرق بين رُتَبِ المتغيّرِ س والمتغيّرِ ص.

ن : عددُ قِيمِ كلٍّ من المتغيّريْن.

نشاط ٣

يُمثّلُ الجدولُ الآتي تقديراتِ ستِ طالباتٍ في التربية الإسلاميّةِ (س)، والتنشئة الاجتماعية (ص):

اسم الطالبة	سلمى	هيفاء	ثورة	صبرا	ندى	هبة
التربية الإسلامية س	جيد	ضعيف	ممتاز	جيد جدا	مقبول	جيد
التنشئة الاجتماعية ص	جيد	جيد	ممتاز	جيد جدا	ضعيف	جيد

أُكملُ الجدولَ الآتي:

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	$ف^{٢}$
جيد	جيد	٣,٥	٤	...	٠,٢٥
ضعيف	جيد	٦	٤	...	٤
ممتاز	ممتاز	١	...	٠	...
جيد جدا	جيد جدا	...	٢	٠	...
مقبول	ضعيف	...	٦	...	١
جيد	جيد	٣,٥	...	-٠,٥	...
					٥,٥

ملاحظة: إذا تساوت الرتبُ نأخذ الوسط الحسابي لرتب القيم المكررة.

$$ر_{س} = ١ - \frac{٦ \sum_{ك=١}^{ن} ف_{ك}^{٢}}{ن\,(ن^{٢} - ١)} = ...$$

نشاط ٤

أحسبُ معاملَ ارتباطِ سبيرمان للبياناتِ في الجدول الآتي:

س	٦٠	٨٠	٦٥	٧٠	٨٥	٦٥	٧٥	٥٥	٦٥	٩٠
ص	٧٠	٦٠	٧٠	٩٠	٧٠	٦٠	٨٠	٧٥	٦٥	٩٠

أُكملُ الجدولَ الآتي:

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف^{٢}
٦٠	٧٠	٩	٦	٣	
٨٠	٦٠				
٦٥	٧٠	٧			
٧٠	٩٠		١,٥		
٨٥	٧٠	٢		٤-	
٦٥	٦٠				
٧٥	٨٠		٣		
٥٥	٧٥				
٦٥	٦٥				
٩٠	٩٠	١			٠,٢٥

$ن = ...$

$\sum_{ك=١}^{ن} ف_{ك}^{٢} = ...$

$ر = ...$

تمارين ومسائل:

١) يُمثّلُ الجدولَ الآتيَ الدخلَ الشهريَّ (س) لستِ أُسَرٍ فِلَسطينيّةٍ، ومجموعَ نفَقاتِها الشهريّة (ص)، بالدينارِ الأردنيّ:

س	٦٠٠	٨٠٠	٧٠٠	٤٠٠	٦٥٠	٥٥٠
ص	٥٥٠	٧٥٠	٧٠٠	٥٠٠	٥٠٠	٤٠٠

أحسبُ معاملَ ارتباطِ الرّتبِ (سبيرمان).

٢) في دراسةٍ لتحديدِ العلاقةِ بين عُمْرِ الأمِّ وعددِ أطفالِها في المجتمعِ الفِلَسطينيّ، قام باحثٌ بجمعِ البياناتِ الآتيةِ عن عددٍ من الأُسَرِ :

عمر الأم	٢١	٢٣	٢٥	٢٧	٣٠	٣٢	٣٤	٣٦	٣٨	٤٠
عدد الأطفال	١	٢	٤	٤	٣	٤	٦	٥	٧	٦

أ) أحسبُ معاملَ ارتباطِ سبيرمان.

ب) أحسبُ معاملَ ارتباطِ بيرسون للبياناتِ نفسِها.

٣) إذا علمت أنّ مجموعَ مربّعاتِ فَرْقِ الرُّتبِ بين متغيريّ الطولِ والكتلةِ لدى عيّنةٍ من تسعةِ أطفالٍ، يساوي ٢١ ، أحسبُ معاملَ ارتباطِ سبيرمان.

٤) يمثّلُ الجدولَ الآتيَ تقديراتِ مجموعةٍ من طلبةِ الصفّ الثاني، في الفصليْن الأول والثاني:

تقدير الفصل الأول	أ	ب	ج	أ	ب	أ	د	ج
تقدير الفصل الثاني	ب	ب	ب	أ	أ	ج	ج	د

أحسبُ معاملَ ارتباطِ سبيرمان.

(٣ - ٤) الانحدارُ الخطّيُّ البسيط
(Simple Linear Regression)

نشاط ١

تشيرُ الإحصاءاتُ إلى أنّ عددَ السيّاراتِ في فلسطينَ في السنوات الأخيرة ازدادَ بشكلٍ ملحوظٍ؛ حيث أصبحَ ثلاثةَ أمثالِ ما كان عليه في العَقْدِ الماضي؛ ما أدّى إلى الازْدحاماتِ والأزماتِ المروريّةِ، وتأخُّرِ وصولِ المواطنين إلى الأماكن التي يقصدونها، في ساعات الصّباحِ بخاصّة، وساعات ما بعد الظهر.

أكتبُ معادلةً تمثّلُ عددَ السيّاراتِ حاليّاً، مقارنةً معَ عددِها في العَقْدِ الماضي.

ص= .... ، حيث: ص ...... ، س ....

تعريف:

تسمى المعادلة $\hat{\text{ص}} = \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}$ التي تربط بين قيم المتغيرين س ، ص معادلة خط انحدار ص على س

حيث: $$\text{أ} = \frac{\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}\,\text{ص}_{\text{ك}} - \text{ن}\,\bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}}{\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}^{2} - \text{ن}\,\bar{\text{س}}^{2}}$$ و $$\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ}\,\bar{\text{س}}$$

$\bar{\text{س}}$ الوسطَ الحسابيَّ لقيمِ المتغيّر س

$\bar{\text{ص}}$ الوسطَ الحسابيَّ لقيمِ المتغيّر ص

نشاط ٢

أحسبُ كلاًّ من: $\overline{\text{س}}$ ، $\overline{\text{ص}}$ للبيانات في الجدول الآتي:

س	٣	٦	٨	-٢	٥
ص	٧	١	٠	٦	-٤

$\overline{\text{س}}$ = ... ، $\overline{\text{ص}}$ = ...

أُكملُ الجدولَ الآتيَ:

س	ص	س^2	س ص
٣	٧		٢١
٦	١	٣٦	
٨	٠		
-٢	٦		
٥	-٤	٢٥	-٢٠

أجدُ معادلة خطِّ الانحدار: $\hat{\text{ص}}$ = ٲس + ب

أحسبُ: قيمةَ ٲ = ... ، وقيمة ب = ...

معادلة خطِّ الانحدار: $\hat{\text{ص}}$ = ... + ...

نشاط ٣

أرادَ أحدُ مصانعِ الألبانِ دراسةَ العلاقةِ بين نَفَقاتِه على الدعاية، وربْحِه اليوميّ بالدينارِ الأردنيّ، فجمعَ البياناتِ الآتية:

نفقات الدعاية س	٢٠٠	١٥٠	١٧٠	٣٠٠	١٠٠
الربح ص	١٦٠٠	١٣٠٠	١٥٠٠	٢٠٠٠	١٠٠٠

لإيجادِ معادلةِ خطِّ انحدار ص على س: $\hat{ص} = أس + ب$، أحسبُ:

$\sum_{ك=١}^{ن} س_ك^٢ = ...$ $\qquad$ $\sum_{ك=١}^{ن} س_ك ص_ك = ...$

$\bar{س} = ...$ $\qquad$ $\bar{ص} = ...$

$أ = ...$ $\qquad$ $ب = ...$

- معادلةُ خطِّ انحدارِ ص على س هي: ....
- إذا أنفقَ المصنعُ ١٦٠ ديناراً على الدعاية، فسيكونُ ربْحُه:

$\hat{ص} = أس + ب$

$= ...... \times ١٦٠ + ... = ...$ ديناراً.

أتعلّمُ: يُمكنُ استخدامُ معادلةِ الانحدارِ في حسابِ قيمِ ص إذا عُلِمتْ قيمُ س.

تمارين ومسائل:

١) أرسمُ شكلَ الانتشارِ، وأرسمُ الخطَّ المستقيمَ، الذي يقعُ عليه أكبرُ عددٍ من النّقاطِ للبياناتِ، في الجدولِ الآتي:

س	١	٣	٥	٣	٢	١
ص	٣	٧	٦	٧	٥	٧

٢) يُمثِّلُ الجدولُ الآتي عددَ ساعاتِ الدراسةِ اليوميّةِ، ومعدّلَ الثانويّةِ العامّةِ، لدى مجموعةٍ من الطلبة:

عدد ساعات الدراسة س	٢	٤	٦	٥	٣
معدل الثانوية العامة ص	٦٠	٧٠	٨٠	٧٠	٧٠

- أجدُ معادلةَ خطِّ انحدارِ ص على س.
- إذا درس طالب ٨ ساعات يومياً، فكم تتوقع المعدل الذي سيحصل عليه؟

٣) إذا كانت معادلةُ خطِّ الانحدارِ بين متغيريْن هي $\hat{\text{ص}} = \text{أ}\text{س} + \text{ب}$ ، وكان معاملُ ارتباطِ بيرسون بينهما يساوي ر ، أجدُ العلاقة بين أ و ر .

(٣ - ٥) مبدأُ العدّ (Counting Principle)

نشاط ١

يعاني الشعبُ الفلسطينيُّ من إجراءاتِ الاحتلالِ أثناء السفرِ والتنقُّلِ بين المدن الفِلسطينيّةِ، سواء كانت حواجزَ، أو إغلاقَ طُرقٍ، أو غير ذلك من المضايقات اليوميّة.

فإذا أرادَ عليٌّ أنْ يسافرَ من الخليلِ إلى رام الله مروراً بالقدس، علماً أنّ بإمكانِه أنْ يسافرَ من الخليل إلى القدس بإحدى ثلاثِ وسائلِ نقلٍ هي: حافلة، سيارة أجرة، سيّارة خاصة، ومن القدس إلى رام الله بإحدى وسيلتيْن هما: الحافلة، أو سيّارة الأجرة.

- يُمكنُ لعليٍّ السفرُ من الخليل إلى القدس بالحافلة، أو .... ، أو .....
- عددُ الطُّرُقِ التي يُمكنُ أنْ يسافرَ بها = ...
- يمكنُهُ السفرُ من القدس إلى رام الله بواسطة ...... ، أو .... ، عدد الطُّرقِ = ...
- عددُ الطُّرقِ التي يُمكنُ لعليٍّ أنْ يسافرَ بها من الخليل إلى رام الله مروراً بالقدس =.......×.......=...........

مبدأ العدِّ الأساسيّ:

إذا أمكننا إجراءُ عمليّةً ما على خطواتٍ عددُها ك، بحيث تتمُّ الأولى بطرقٍ عددها $ن_{١}$، وتتمُّ الثانية بطُرُقٍ عددها $ن_{٢}$، وهكذا حتى الخطوةِ الأخيرةِ التي تتمُّ بطرقٍ عددها $ن_{ك}$، فإنّ عددَ الطُّرقِ الكليّةِ التي تتمُّ بها هذه العملية هي: $ن_{١} \times ن_{٢} \times ن_{٣} \times \dots \times ن_{ك}$.

نشاط ٢

يُرادُ تكوينُ مجلسِ إدارةٍ لشركةٍ ما، مكوَّنٍ من رئيسٍ، ونائبِ رئيسٍ، وأمينٍ للصندوقِ، بكم طريقةٍ يمكنُ تكوينُ هذا المجلسِ، إذا كان عددُ الأشخاصِ المرشّحين ٥ ؟

لاختيار الرئيسِ، هناك ٥ طرقٍ مختلفة.

لاختيار نائبِ الرئيس، هناك .... طرقٍ مختلفة، لماذا ؟

لاختيار أمينِ الصندوق، هناك .... طرقٍ مختلفة.

عدد الطرق المختلفة لتكوين المجلس= ... × ... × ٣ =... طريقة مختلفة.

نشاط ٣

كم عدداً مكوّناً من منزلتيْن، يمكنُ تكوينُه من مجموعة الأرقام: { ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ } ؟

أ) إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

تتمُّ العمليّةُ في مرحلتين: المرحلةُ الأولى اختيارُ منزلةِ الآحاد، وتتمُّ بـ ... طُرُق، واختيارُ منزلةِ العشراتِ، وتتمُّ أيضا بـ ... طرق. إذن عددُ الطرقِ الكليّة = ... × ... = ١٦ طريقةً.

ب) إذا لم يُسمَحْ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

عددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ الآحادِ... طرق، وعددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ العشرات ... طرق .

عدد الطرق المختلفة = ... × ... = ١٢ طريقةً، أيّ أنّ: عدد الأعداد المختلفة ١٢ عدداً.

مضروبُ العدد:

بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ لخمسةِ أشخاصٍ أن يجلسوا في خمسةِ أماكنَ في خطٍّ مستقيم؟

حسب مبدأ العدّ: عدد الطرق المختلفة هي ٥ × ... × ... × ... × ... = ١٢٠ طريقةً مختلفةً.

اصطُلِحَ على كتابة حاصلِ الضرب ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ على الصورة ٥! ، وتُقرَأُ مضروب العدد ٥.

تعريف:

إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً، فإنّ مضروبَ العدد ن ، ويُرمَزُ له بالرمز ن!

حيث: $ن! = ن(ن - ١)(ن - ٢) \ .... \ ٣ \times ٢ \times ١$

$٠! = ١$

نشاط ٤

أحسبُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) $٦! = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ...$

ب) $\frac{٥!}{٣!} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣!}{٣!} = ... = ٢٠$

جـ) $\frac{٨!}{٥! \ ٣!} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥!}{٥! \times ٣ \times ٢ \times ١} = ...$

نشاط ٥

أكتبُ $\frac{ن!}{(ن - ٢)!}$ في أبسط صورة.

$\frac{ن!}{(ن - ٢)!} = \frac{ن(ن - ١)(ن - ٢)!}{(ن - ٢)!} = ...$

قيمةُ المقدارِ، عندما ن = ٥ تساوي ....

تمارين ومسائل:

١) يقدِّمُ أحدُ المطاعمِ في مدينةِ نابُلْسَ ٣ أنواعٍ من اللّحوم، و ٤ أنواعٍ من الحَلْوى، ونوعيْن من المشروبات. بكم طريقةٍ يمكنُ لأحدِ مرتادي المطعم اختيارَ وجبةٍ مكوّنةٍ من نوعٍ من اللّحومِ، ونوعٍ من الحَلْوى، ومشروبٍ؟

٢) أُلقِيتْ قطعةُ نقدٍ ٣ مرات، فما عددُ النتائجِ الممْكِنةِ؟ أكتبُ النتائجَ في مجموعة.

٣) كم عدداً مؤلّفاً من ثلاث منازل، يمكنُ تكوينُهُ من مجموعة الأرقام: { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }؟

أ) إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

ب) إذا لم يُسمحْ بتكرار الرقمِ في أكثر من منزلة.

٤) أحسبُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي :

أ) $٨! - ٤!$

ب) $\frac{٧! \times ١٠!}{٩! \times ٥!}$

٥) أكتبُ المقدار: $\frac{(\text{ن} + ١)!}{(\text{ن} - ١)!}$ ، حيث $\text{ن} \geq ١$، بأبسط صورة.

٦) بكم طريقةٍ يمكنُ لستةِ أشخاصٍ الجلوسُ على ٨ كراسي، في خطٍّ مستقيم.

٧) إذا كان $\text{ن}! = ٥٠٤٠$ ، فما قيمةُ ن ؟

٨) كم عدداً زوجيّاً يمكنُ تكوينُه من ثلاثِ منازلَ ، من ضمن الأرقام: ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة ؟

(٣ - ٦) التباديل (Permutations)

نشاط ١

لقد خطَتِ الرياضةُ الفِلسطينيّةُ في السنوات الأخيرة خُطُواتٍ واسعةٍ، ولعلّ أبرزَ دليلٍ على ذلك تأهُّلُ منتخَبِ فلسطينَ في كُرةِ السلة لكأسِ أُمَمِ آسيا، في العام ٢٠١٥.

فإذا أرادَ المنتخبُ الوقوفَ على خطٍّ مستقيمٍ، لأخذِ صورةٍ تذكارية، فإنّ عددَ الطرقِ الكليّةِ للفريقِ لأخذ الصورة هي: ٥ × ... × ... × ... × ... = ...

أتعلّمُ: عددُ الطرقِ المختلفةِ التي يمكنُ للفريقِ أنّ يقفَ فيها، لأخذِ الصورةِ، هي عددُ الترتيباتِ المختلفةِ للاعبين، وهو ما يُسمّى التباديل.

تعريف:

عددُ تباديل ن من العناصر مأخوذةٌ جميعاً في كل مرة، هو ن! ، ويُرمَزُ له بالرّمزِ ل(ن،ن)،
حيث ن ∈ ص$^+$

ل(ن،ن) = ن! = ن(ن − ١)(ن − ٢) × .... × ٣ × ٢ × ١

نشاط ٢

أجدُ قيمةَ: ل(٦،٦).

ل(٦،٦) = ٦ × ... × ... × ... × ... × ١ =٧٢٠

ل(٥،٥) = ...   ماذا نلاحظ؟

نشاط ٣

أجدُ عددَ الأعداد المكوّنةِ من منزلتيْن، التي يمكنُ تكوينُها من مجموعة الأرقام:
{ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } ، إذا لم يُسمحْ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

ألاحظُ أنَّ المطلوبَ هو عددُ الترتيباتِ الثنائيّةِ لمجموعةِ الأرقامِ هذه، بشرط عدم التكرار، ويساوي ....×....=....

وهذا ما يُسمَّى التباديلَ الثنائيّةَ لمجموعةٍ فيها ٥ عناصر، وبشكلٍ عام، فإنّ عددَ التباديلِ الرائيّةِ لمجموعةٍ مكوّنةٍ من (ن) من العناصر، ويُرمَزُ له بالرمز ل(ن ، ر)،

يساوي $\frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{ر})!}$ حيث ن ، ر عددان طبيعيّان، ن ≥ ر

نشاط ٤

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ل(٥ ، ٣) = $\frac{٥!}{(٥ - ٣)!}$ = ...

ب) ل(ن ، ٣) = $\frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - ٣)!}$ = ... = ...

أتعلمُ: يمكنُ كتابةُ ل(ن،ر) على الشكل: ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)...(ن-ر+١).

نشاط ٥

أتحقّقُ ممّا يأتي:

أ) ل(ن ، ١) = $\frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - ١)!}$ = ... = ن

ب) ل(ن ،٠) = ... = ١

جـ) ل(ن ، ن) = ... = ن!

نشاط ٦

بكم طريقةٍ يمكنُ تشكيلُ لجنةٍ مكوّنةٍ من رئيسٍ، ونائبِ رئيسٍ، وأمينِ سرٍّ من بين سبعة أشخاص ؟

عددُ الطرقِ التي يمكنُ تشكيلُ اللجنةِ بها هي:

ل(٧ ، ٣) = ... × ... × ... = ٢١٠ طرقٍ مختلفة.

تمارين ومسائل:

١) أحسبُ قيمةَ ما يأتي:

أ) ل(٦،٤)   ب) $\frac{\text{ل}(٩،٢)}{\text{ل}(٩٠،٠)}$

٢) أرادَ أحمدُ وإخوانُه الثلاثةُ الذهابَ إلى المسجدِ الأقصى، واتفقوا على أنْ يدخلَ كلٌّ منهم من بابٍ مختلفٍ من أبوابِ القدسِ السبعةِ. بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ للإخوةِ الأربعةِ الوصولُ إلى المسجد الأقصى؟

٣) أجدُ قيمةَ ن في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ل(ن ، ٢) = ٥٦

ب) ل(ن ، ٣) = ٢١٠

جـ) ل(ن − ٣ ، ٢) = ٦

٤) دُعِيَ خمسةُ رجالٍ وزوجاتُهم الخمسُ لحضور حفلِ تخرُّجِ طلبةِ الثانويةِ العامةِ، في القرية التي يسكنون فيها، بكم طريقةٍ يمكنُ لهم أن يجلسوا على ١٠ كراسي، في خطٍّ مستقيم، بحيث يجلسُ الرجالُ متجاورين، والزوجات متجاورات ؟

٥) إذا كان ل(ن،ر) = ١٢٠، أجدُ قيمَ ن،ر الممكِنةَ. كم حلًّا للسؤال ؟

(٣ - ٧) التوافيق (Combinations)

نشاط ١

تكثُرُ المعالِمُ الأثريّةُ في فلسطينَ، مثل سَبَسْطيةَ في نابُلُسَ، وقصرِ هشامٍ في أريحا، أقدمِ مدينةٍ في العالم.

ذهب خمسةُ أصدقاءَ: محمدٌ، ويزنٌ، وخالدٌ، وخليلٌ، وعلاءٌ، من الصفِّ العاشر في رحلة إلى منطقة سبسطيةَ الأثريةَ، وفي موعدِ الغداء اتفقوا على اختيار ثلاثةٍ منهم لإعداد الطعام للجميع، فاقترحَ أحدُهم أنْ يلجأوا إلى القُرعة، وذلك بعد تقسيم المجموعة إلى مجموعات ثلاثيّة مثل: {محمد، يزن، خالد}، {محمد، يزن، خليل}.

- أكملُ باقي المجموعات.....
- هل يمكنُ أنْ تكونَ إحدى المجموعات: يزن، خالد ، محمّد ؟ لماذا ؟
- عدد المجموعات التي يمكنُ تكوينُها.......... مجموعة.

تعريف:

عدد التوافيقِ الرائيّةِ لمجموعة فيها ن من العناصر، ويُرمزُ له بالرّمز:

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ل}(\text{ن}،\text{ر})}{\text{ر}!} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!\ \text{ر}!} \text{ ، } \text{ن} \geq \text{ر}$$

نشاط ٢

لدى معرِضِ سيّاراتٍ ٦ أنواعٍ من السيارات، يريدُ صاحبُ المعرِضِ اختيارَ ٤ منها، لعرضِها للزبائن.

أجدُ عددَ الطرقِ التي يمكنُ بها الاختيار.

بما أنّ إعادة الترتيب لا تعطي نتيجة جديدة، أي أنّ الترتيبَ غيرُ مهم.

إذن: عددُ الطرق يساوي $= \binom{٦}{٤} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤!}{٢!٤!} = ...$

نشاط ٣

أحسبُ كلًّا ممّا يأتي:

أ) $\binom{٨}{٤} = \frac{٨!}{٤!\,٤!} = ...$

ب) $\binom{٦}{١} = ... = ٦$

جـ) $\binom{٥٢}{٠} = ... = ١$

د) $\binom{٢٥}{٢٥} = ...$

نشاط ٤

أستنتجُ القواعدَ الآتية :

أ) $\binom{\text{ن}}{٠} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - ٠)!\,٠!} = ... = ١$

ب) $\binom{\text{ن}}{\text{ن}} = ... = ١$

جـ) $\binom{\text{ن}}{١} = ... = \text{ن}$

د) $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \binom{\text{ن}}{\text{ن} - \text{ر}}$

تمارين ومسائل:

١) أحسبُ ما يأتي:

أ) $\binom{٩}{٥}$ ب) $\binom{٩}{٤}$ جـ) $\binom{٧٥}{١}$

٢) أجدُ قيمَ ن في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ) $\binom{ن}{٢} = ٣$ ب) $\binom{ن}{٩} = \binom{ن}{٤}$

٣) بكم طريقةٍ يمكنُ تكوينُ فريقٍ لكرةِ السّلةِ، يتمُّ اختيارُه من بين ثمانية لاعبين ؟

٤) صفٌّ مكوّنٌ من ٩ طلابٍ، و٧ طالباتٍ، يُرادُ تشكيلُ لجنةٍ مكوّنةٍ من ٣ طلابٍ، و٤ طالباتٍ، بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ تشكيلُ اللجنة ؟

(٣ - ٨) نظريّةُ ذاتِ الحدّيْن (Binomial Theorem)

نشاط ١

تعلمتَ في صفوفٍ سابقةٍ قانونَ التوزيع؛ لذا بإمكانك إيجادَ مفكوكِ كلٍّ من الآتية:

$(\text{أ} + \text{ب})^{٢} =$

$(\text{أ} + \text{ب})^{٣} =$

$(\text{أ} + \text{ب})^{٤} =$

والآن، ماذا لو طُلِبَ منك إيجادُ مفكوكِ $(\text{أ} + \text{ب})^{١٥}$ ؟

لاشك أنّك تستطيعُ ذلك وَفقَ ما تعلمتَهُ سابقاً، بضرب المقدار أ + ب في نفسه خمس عشرة مرةً، وهي طريقةٌ طويلةٌ وشاقةٌ؛ لذا فهناك حاجةٌ لاستخدام نظرية ذات الحدّيْن، لإيجاد مفكوكٍ من هذا النوع.

نظريّة ذات الحدّين:

$$(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} = \sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ن}} \binom{\text{ن}}{\text{ر}} \text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}} \text{ب}^{\text{ر}}$$

$$= \binom{\text{ن}}{٠}\text{أ}^{\text{ن}}\text{ب}^{٠} + \binom{\text{ن}}{١}\text{أ}^{\text{ن}-١}\text{ب}^{١} + \binom{\text{ن}}{٢}\text{أ}^{\text{ن}-٢}\text{ب}^{٢} + \ldots\ldots + \binom{\text{ن}}{\text{ن}}\text{أ}^{٠}\text{ب}^{\text{ن}}$$

حيث ن عدداً طبيعياً

نشاط ٢

أجدُ مفكوكَ: $(\text{س} + ٢)^{٥}$

$$(\text{س} + ٢)^{٥} = \sum_{\text{ر}=٠}^{٥} \binom{٥}{\text{ر}} \text{س}^{٥-\text{ر}}\, ٢^{\text{ر}}$$

$$= \text{س}^{٥} + ٥\text{س}^{٤} \times ٢ + ١٠\text{س}^{٣} \times ٤ + ١٠\text{س}^{٢} \times ٨ + ٥\text{س} \times ١٦ + ٣٢$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

نشاط ٣

لإيجاد مفكوكِ المقدار: $(٢س - ١)^{٣}$:

- أكتبهُ على الشكل: $(٢س + {}^{-}١)^{٣}$.
- أجدُ مفكوك المقدار: $(٢س + {}^{-}١)^{٣} = \binom{٣}{٠}(٢س)^{٣}(-١)^{٠} + ...$

أستنتجُ:

- عددُ حدودِ مفكوك $(أ + ب)^{ن} = ...$
- مجموعُ أُس أ وأس ب في أيّ حدٍّ من حدود المفكوك = ...

أتعلّمُ:

- في مفكوك $(أ + ب)^{ن} = أ^{ن} + \binom{ن}{١} أ^{ن-١} ب^{١} + \binom{ن}{٢} أ^{ن-٢} ب^{٢} + ... + ب^{ن}$
- في الحدِّ الأول: قيمة ر تساوي ٠ ، وفي الحد الثاني: قيمة ر تساوي ١، وهكذا ..

أي: $ح_{ر+١} = \binom{ن}{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر}$ ، وهذه صورةُ الحدِّ العام.

نشاط ٤

في مفكوك $(٢س + \frac{١}{٢})^{٦}$، أجدُ الحدَّ الثالث .

في الحد الثالث تكون قيمةُ ر = ٢

$ح_{٣} = \binom{٦}{٢} (٢س)^{٤} (\frac{١}{٢})^{٢} = ١٥ \times ١٦ \times س^{٤} \times \frac{١}{٤} = ...$

نشاط ٥

أجدُ الحدَّ الأوسطَ في مفكوك: $(\frac{٢}{٣}ص + ٣)^{٨}$

بما أنَّ ن = ٨ ، إذن: عدد الحدود يساوي ....

رتبةُ الحدّ الأوسطِ هي: $\frac{٨}{٢} + ١ = ٥$

$ح_{٥} = \binom{٨}{٤} (\frac{٢}{٣})^{٤} ص^{٤} (٣)^{٤} = ... = ٧٠ \times ١٦ص^{٤} = ...$

نشاط ٦

أجدُ قيمةَ المقدار: $(١,٢)^{٥}$

$(١,٢)^{٥} = (١ + ٠,٢)^{٥}$

مفكوك $(١ + ٠,٢)^{٥} =$ ....

أستخدمُ الآلّةَ الحاسبةَ، لإيجاد قيمةِ المقدار$(١,٢)^{٥}$ ، وأقارنُ بين الإجابتيْن.

تمارين ومسائل

(١) أجُد مفكوكَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) $(س + ٣)^{٦}$

ب) $\left(\frac{س^{٢}}{٣} + \frac{٣}{س}\right)^{٤}$ ج) $(٢ - س)^{٥}$

(٢) أجدُ الحدَّ السابعَ في مفكوك: $\left(س + \frac{١}{٢}\right)^{١٠}$

(٣) أجدُ الحديْن الأوسطيْن في مفكوك: $\left(\frac{س^{٢}}{٣} + \frac{٣}{س}\right)^{٧}$

(٤) أستخدمُ مفكوكَ ذاتِ الحديْنِ في إيجاد قيمةٍ تقريبيّةٍ، لأقربِ ٣ منازل عشريّة للمقدار: $(٣,٩٨)^{٣}$

(٥) أجدُ الحدّ الذي يحوي $س^{٣}$ في مفكوك: $\left(٢س - \frac{١}{٢}\right)^{٥}$

(٦) أيُّ حدٍّ في مفكوك $(أ + ب)^{٢٥}$ ، له معاملُ الحدّ ٢٣ نفسه ؟

(٣ - ٩): تمارين عامّة

السؤال الأول:

أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

(١) أيُّ القيم الآتية لا يمكنُ أنْ تمثِّلَ معاملَ ارتباط بيرسون الخطيّ بين متغيّريْن؟

أ) صفر   ب) ١   جـ) -١   د) -١,١

(٢) أيُّ من القيمِ الآتية تساوي ل(ن ، ٢)؟

أ) ٣٠   ب) ٢٧   جـ) ٢٥   د) ٢٤

(٣) إذا كان ن! = ٦ فما قيمة ل(٣ن،٢) ؟

أ) ١٨   ب) ٢٧   جـ) ٥٤   د) ٧٢

(٤) ما قيمةُ: $\binom{٦}{٣} - \binom{٤}{٢}$ ؟

أ) ٢٠   ب) ١٤   جـ) ٥   د) ٢

(٥) ما معاملُ الحدّ الثامنِ في مفكوك (س + ص)^{٩} ؟

أ) ٧   ب) ٩   جـ) ٣٦   د) ٦٣

(٦) ما الحدُّ الأوسطُ في مفكوك: (٢أ $-\frac{١}{٢}$)^{١٠} ؟

أ) ٨٨ أ^{٦} ب) -٢٥٢ أ^{٥} جـ) ٨٨   د) -٢٥٢

السؤال الثاني:

أرسمُ شكلَ الانتشار للبيانات الآتية، وأُبيّنُ نوع الارتباط بين س، ص :

س	٢	٤	٦	٨	١٠
ص	٢٠	١٨	١٥	١٢	١٠

السؤال الثالث أحسبُ معاملَ ارتباطِ بيرسون للبيانات في الجدول الآتي:

س	-١٠	-٥	صفر	٥	٢٠
ص	٢	٨	١٠	١٥	٢٠

السؤال الرابع أحسبُ معاملَ ارتباطِ سبيرمان بين المتغيّرَيْن: أ ، ب ، للبيانات في الجدول الآتي:

أ	٨٠	٥٠	٤٠	٦٠	٥٠	٩٠	٨٠	٧٠	٤٠	٦٠
ب	٧٠	٦٠	٥٠	٨٠	٧٠	٩٠	٧٠	٤٠	٤٠	٥٠

السؤال الخامس اعتماداً على البيانات في الجدول الآتي، أجدُ معادلةَ خطِّ انحدار ص على س :

س	٣	٥	٧	٩	١١	٧
ص	٨	١٠	٧	١١	١٢	٦

السؤال السادس

كم عدداً مكوّناً من ٣ منازل، وأصغر من ٣٠٠، يمكنُ تكوينُهُ من الأرقام: ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة؟

السؤال السابع

ما عددُ النواتجِ المُمكنةِ لتجربةِ رَمْيِ حجرِ النّردِ ٣ مرّاتٍ؟

السؤال الثامن

أحلُّ المعادلات الآتية :

أ) $٥ \, ن! = ٣٦٠٠$

ب) $٣٠ \, ن! = (ن + ٢)!$

السؤال التاسع

إذا كان $\frac{٥}{(ن - ١)!} + \frac{٣}{(ن - ٢)!} = \frac{٢٠٨}{ن!}$، أجدُ قيمةَ ن.

السؤال العاشر

أُعبِّرُ عن كلٍّ ممّا يأتي بالصورة ل(ن، ر) :

أ) $٩ \times ٨ \times ٥ \times ٦ \times ٧$ ب) ٢٥٢٠ ج) $ن(ن^٢ - ٣ن + ٢)$

السؤال الحادي عشر

أ ، ب ، ج ، د أربعُ نقاطٍ في المستوى، لا تقع أيّةُ ثلاثٍ منها على استقامة واحدة. كم قطعةً مستقيمةَ يمكنُ رسمُها بين أي نقطتين من هذه النقاط ؟

السؤال الثاني عشر

يريدُ طلبةُ الصفّ العاشرِ البالغ عددُهم ١٥ طالباً في إحدى المدارس الفلسطينيّةِ اختيارَ لجنةٍ مكوّنةٍ من ٣ أشخاص لتمثيلهم أمام إدارة المدرسة:

أ) بكم طريقةٍ يمكنُ اختيارُ اللجنة.

ب) بكم طريقة يمكن اختيارها إذا تكوّنت من: رئيسٍ، وأمينِ سرٍّ، وعضوٍ ؟

السؤال الثالث عشر

أجدُ مفكوكَ: $(\frac{١}{٢}س - \frac{١}{٣})^٤$.

السؤال الرابع عشر

كم قُطراً للشكل الخماسيّ ؟

أُقيّمُ ذاتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	دون المتوسط
ايجاد معامل الارتباط			
استخدام مبدأ العد والتباديل والتوافيق في حل مشكلات حياتية			
ايجاد مفكوك مقدار جبري مكون من حدين			

فكرةٌ رياديّة:

فكر مجموعة من طلبة الصف العاشر تقديم المساعدة لأسرة فقيرة في القرية، عن طريق تصميم وتنفيذ مشروع صغير يعود بمردود مادي، وهو إنشاء مزرعة دجاج بياض بعدد (١٠٠٠) دجاجة.

بالرجوع الى وزارة الزراعة أو أحد الخبراء في تربية الدواجن، احصل على معلومات حول عمر الدجاجة وعدد البيض المنتج.

أكتب المعادلات اللازمة لوصف العلاقة بين عمر الدجاجة وعدد إنتاجها من البيض. ادرس هذه الفكرة من حيث النجاحات والمخاطر، ثم قدر الأرباح المتوقعة بعد عام من تنفيذ المشروع.

روابط أو برامج الكترونية:

atorwww.NLVM
Microsoft Mathmatics

المشروع

المشروع: شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع.

ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

ميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.

٢. ينفّذه فرد أو جماعة.

٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.

٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.

٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيّتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.

٢. أن يوفّر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.

٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.

٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومترابطة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلّب مجالاً على الآخر.

٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.

٦. أن يُخطّط له مسبقاً.

ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخّل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.

٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.

٣. تحديد خطوات سير المشروع.

٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، **(شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).**

٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلّي.

ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفّره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلّاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخّل.

٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلّم بالأخطاء.

٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.

٤. التدخّل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.

٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.

٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.

٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:

١. **الأهداف** التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.

٢. **الخطة** من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحّدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.

٣. **الأنشطة** التي قام بها الطلبة من حيث، تنوّعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.

٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقّق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التى استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

المراجع

الجنابي، احمد نصيف (1980):، الرياضيات عند العرب ، منشورات دار الجاحظ للنشر، الجمهورية العراقية

الزغلول، عماد (2005)، الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع.

فريدريك بل (1986):طرق تدريس الرياضيات:الجزء الثاني؛ (ترجمة محمد المفتي و ممدوح سليمان). قبرص:الدار العربية للنشر والتوزي

اللحام ، أنور (1990): الجبر ، ط4 ، مطبعة دار الكتاب ، دمشق

ريتش، بارنيت (2004) : الجبر الأساسي، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية –القاهرة- مصر

نورة ،دهبي (2008): الرياضيات ، دار الصفاء للنشر و التوزيع- عمان-الأردن

رمضان صبرا، أحمد عثمان، غريب موسى، روز زريقات (1997): الرياضيات العامة، دارالمناهج للنشر و التوزيع - عمان - الأردن

Kline, M,(1972): Mathematics Thought From Ancient to Modern Times, Oxford, N.Y

Lamborg.James(2005):Math reference,Wiley ,N.Y

Bell,E,T(1937): ,Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y

Friel,Suzan.Rashlin,Sid.Doyle,Dot.& others(2001): Navigating through Algebra in Grades 6-8. NCTM. RESTON, VIRGINIA .

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume1

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume2

لجنة المناهج الوزارية

د. صبري صيدم	**د. بصري صالح**	**م. فواز مجاهد**
أ. ثروت زيد	**أ. عزام ابو بكر**	**أ. علي مناصرة**
د. شهناز الفار	**د. سمية النخالة**	**م. جهاد دريدي**

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد صالح (منسقًا)	د. معين جبر	د. علي عبد المحسن
د. تحسين المغربي	د. عادل فوارعة	أ. وهيب جبر	د. عبد الكريم ناجي
د. عطا أبوهاني	د.سعيد عساف	د. محمد مطر	د. علا الخليلي
د. شهناز الفار	د. علي نصار	د. أيمن الأشقر	أ. ارواح كرم
أ. حنان أبو سكران	أ. كوثر عطية	د. وجيه ضاهر	أ. فتحي أبو عودة
د. سمية النخالة	أ. أحمد سياعرة	أ. قيس شبانة	أ. مبارك مبارك
أ. عبد الكريم صالح	أ. أحلام صلاح	أ. نسرين دويكات	أ. نادية جبر
أ. نشأت قاسم			

المشاركون في ورشات عمل الجزء الأول من كتاب الرياضيات للصف العاشر

أ. إياد دويكات	أ. آنية رضوان	أ. دعاء شتية	أ. مها غانم	أ. هيا رواشدة
أ. رفيق الصيفي	أ. صلاح الترك	أ. رأفت عامر	أ. سهيل شبير	أ. باسم المدهون
أ. منال الصباغ	أ. معزوز ضبابات	أ. محمد غانم	أ. هاشم أبو بكر	أ. أماني شاور
أ. أشجان جبر	أ. راتب نصار	أ. أرواح كرم	أ. محمد الفرا	أ. عبدالله مهنا
أ. وفاء موسى	أ. ابتسام اسليم	أ. عارف السعافين	أ. رانية شريم	أ. ريم العويصات
أ. عهود طه	أ. ميسون جمل			